

Άλγεβρα Πινάκων & Στατιστική

Περιεχόμενα:

Στη μοντελλοποίηση οικονομικών προβλημάτων και στις επιχειρήσεις, τα περισσότερα προβλήματα είναι γραμμικά, ή προσεγγίζονται από γραμμικά μοντέλα. Τέτοια προβλήματα λύνονται με τη βοήθεια πινάκων. Έτσι, η εξέταση πινάκων είναι σημαντική σε αυτούς τους τομείς.

Διακύμανση, Άθρ. τετραγώνων, Διαν. Γινόμενο

Σκοπός είναι να υπολογίσουμε, ή να εξηγήσουμε, τη διακύμανση δεδομένων. Η διακύμανση είναι το πιο ευραίως διαδεδομένο μέτρο διασποράς και είναι άμεσα συνδεδεμένο με το μέγεθος της διακύμανσης στα δεδομένα. Πιο κάτω δίνονται δύο χρηματοοικονομικοί δείκτες, X_1 και X_2, για 12 υποθετικές επιχειρήσεις.

	Αρχικά Δεδομ.		Mean-διορθωμένα Δεδομ.		Κανονικοπ. Δεδομ.	
Επιχείρ.	X_1	X_2	x_1	x_2	x_1	x_2
1	13	4	7.92	3.83	1.62	1.11
2	10	6	4.92	5.83	1.01	1.69
3	10	2	4.92	1.83	1.01	0.53
4	8	-2	2.92	-2.17	0.60	-0.63
5	7	4	1.92	3.83	0.39	1.11
6	6	-3	0.92	-3.17	0.19	-0.92
7	5	0	-0.08	-0.17	-0.02	-0.05
8	4	2	-1.08	1.83	-0.22	0.53
9	2	-1	-3.08	-1.17	-0.63	-0.34
10	0	-5	-5.08	-5.17	-1.04	-1.49
11	-1	-1	-6.08	-1.17	-1.24	-0.34
12	-3	-4	-8.08	-4.17	-1.65	-1.20
Mean	5.08	0.17	0	0	0	0
SS			262.92	131.67	11	11
Var	23.90	11.97	23.90	11.97	1	1

Ο μέσος της jth μεταβλητής δίνεται από:

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ij}}{n},$$

όπου X_{ij} είναι η ith παρατήρηση της jth μεταβλητής και n είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων.

Η διορθωμένη με το μέσο μεταβλητή jth συμβολίζεται με x_j. Έτσι, $x_{ij} = X_{ij} - \mu_j$.

Η διακύμανση της jth μεταβλητής δίνεται από:

$$s_{jj} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}{n-1} = \frac{\text{SS}}{\text{df}},$$

όπου SS είναι το *άθροισμα τετραγώνων* αποκλίσεων από το μέσο και df είναι οι βαθμοί ελευθερίας.

Η γραμμική συσχέτιση, μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών δεικτών μπορεί να υπολογιστεί με τη συνδιακύμανση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Το μέτρο συνδιακύμανσης μεταξύ των μεταβλητών

X_i και X_k, δίνεται από:

$$s_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ik}}{n-1} = \frac{\textbf{SCP}}{\textbf{df}},$$

όπου SCP είναι το *άθροισμα του διανυσματικού γινομένου (sum of cross products)* (SCP). Έτσι, η συνδιακύμανση, είναι απλά το μέσο διανυσματικό γινόμενο μεταξύ των δύο μεταβλητών για κάθε βαθμό ελευθερίας.

Τα SS και SCP συνοψίζονται συνήθως σε ένα *sum of squares and cross products* (**SSCP**) πίνακα. Η διακύμανση και η συνδιακύμανση συνοψίζονται συνήθως σε ένα πίνακα συνδιακύμανσης **S**.

Τα **SSCP** και **S** των δύο χρηματοοικονομικών δεικτών δίνονται από:

$$\mathbf{SSCP} = \begin{pmatrix} 262.92 & 136.38 \\ 136.38 & 131.67 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 23.90 & 12.40 \\ 12.40 & 11.97 \end{pmatrix}.$$

Σημειώστε ότι οι πίνακες είναι συμμετρικοί.

Θυμηθείτε ότι:

- Η διακύμανση μιας μεταβλητής είναι ένας τρόπος μέτρησης της μεταβολής (variation) στα δεδομένα. Οι διακυμάνσεις διαφόρων μεταβλητών μπορούν να συγκριθούν μόνο αν οι μεταβλητές έχουν τις ίδιες μονάδες μέτρησης.

- Η συνδιακύμανση μεταξύ δύο μεταβλητών είναι τρόπος μέτρησης της συσχέτισης (covariation) μεταξύ τους. Δηλαδή μετρούμε κατά πόσο οι δύο μεταβλητές μεταβάλλονται - αλλάζουν μαζί. Η απόλυτη τιμή του κατώτατου ορίου συνδιακύμανσης είναι μηδέν. Αυτό υποδηλώνει ότι οι δύο μεταβλητές δε συσχετίζονται γραμμικά. Η συνδιακύμανση δεν έχει όμως ανώτατο όριο τιμών. Αυτό δυσχαιρένει τη σύγκριση δύο μεταβλητών σε ένα δείγμα.

Κανονικοποίηση (Standardization)

Για τη δημιουργία κανονικοποιημένων δεδομένων αρκεί να αναπροσαρμόσουμε τα δεδομένα βάση του μέσου (mean-corrected) και να διαιρέσουμε με την αντίστοιχη τυπική απόκλιση (τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης).

Οι διακυμάνσεις των κανονικοποιημένων μεταβλητών είναι πάντοτε 1. Η συσχέτιση κανονικοποιημένων μεταβλητών ορίζεται πάντοτε μεταξύ -1 και 1. Η τιμή θα είναι:

- 0 (μηδέν) αν δε συσχετίζονται γραμμικά οι δύο μεταβλητές
- -1 (μείον ένα) αν υπάρχει απόλυτη αντίστροφη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών
- $+1$ (ένα) αν υπάρχει απόλυτη θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Η συνδιακύμανση δύο κανονικοποιημένων μεταβλητών ονομάζεται συντελεστής συσχέτισης (correlation coefficient). Ο πίνακας συσχετίσεων **(R)** είναι ο πίνακας συνδιακυάνσεων των κανονικοποιημένων δεδομένων. Στο παράδειγμα ο πίνακας συσχετίσεων δίνεται από:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.733 \\ 0.733 & 1.00 \end{pmatrix}.$$

Πίνακες

Ένας Πίανκας είναι μια κατάταξη στοιχείων δύο διαστάσεων. Ένας $m \times n$ (m by n) πίνακας αποτελείται από m γραμμές και n στήλες. Λέγεται ότι είναι διαστάσεων $m \times n$.

Οι Πίνακες συνήθως συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους με μικρά. Ένας πίνακας $m \times n$, A, που περιλαμβάνει τα στοιχεία α_{ij}, συμβολίζεται με $A = [\alpha_{ij}] \in \Re^{m \times n}$ και έχει τη γενική μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mj} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow i\text{γραμμή}$$

Οι δείκτες του στοιχείου α_{ij} υποδειλώνουν ότι το στοιχείο αυτό βρίσκεται στη διασταύρωση της γραμμής i και της στήλης j, όπου $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$.

Ο πίνακας που αποτελείται από μία γραμμή ή μία στήλη ονομάζεται διάνυσμα γραμμή και διάνυσμα στήλη, αντίστοιχα.

Ένα διάνυσμα γραμμή R που αποτελείται από n στοιχεία συμμβολίζεται $R \in \Re^{1\times n}$ και έχει τη γενική μορφή $R = (r_1 \;\; \ldots \;\; r_n)$.

Ένα διάνυσμα στήλη C που αποτελείται από m στοιχεία συμβολίζεται $C \in \Re^{m\times 1}$ και έχει τη γενική μορφή

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Γενικά το διάνυσμα C με m στοιχεία θεωρείται ότι είναι ένα διάνυσμα στήλης και συμβολίζεται $C \in \Re^m$.

Ειδικες μορφες πινακων

- Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι ένας πίνακας που έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών. Έτσι ένας πίνακας $m \times n$ είναι τετραγωνικός αν $m = n$. Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων (variance-covariance) και ο πίνακας συσχέτισης (correlation) είναι τετραγωνικοί.

- Ο Ταυτοτικος η μοναδιαιος είναι ένας τετραγωνικός πίνακας του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου ισούνται με 1 και όλα τα άλλα στοιχεία ισούνται με μηδέν. Ένας τέτοιος πίνακας $m \times m$ συμβολίζεται I_m. Π.χ.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Αναστροφος πινακας.

  Παίρνοντας έναν πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in \Re^{m \times n}$ ο πίνακας B είναι ο ανάστροφος του A εάν $B = [b_{ij}] \in \Re^{n \times m}$ και $b_{ji} = \alpha_{ij}$. Ο ανάστροφος του πίνακα A συμβολίζεται A^T.

Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad I_3^T = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = (3 \quad 4 \quad 5) \rightarrow \quad R^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$R^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \quad (R^T)^T = R = (3 \quad 4 \quad 5)$$

- Ο πίνακας A είναι ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ εάν $A = A^T$. Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A^T \quad \text{και} \quad A = I_m = A^T.$$

Ο πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης και ο πίνακας συσχέτισης είναι συμμετρικοί.

$$S = \begin{pmatrix} 2.7 & 6.4 & -3.2 \\ 6.4 & 5.2 & 1.1 \\ -3.2 & 1.1 & 3.1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad R = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.7 & -0.6 \\ 0.7 & 1.0 & 0.2 \\ -0.6 & 0.2 & 1.0 \end{pmatrix}$$

• Άνω και κάτω τριγωνικοι πινακες.

Ένας πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in \Re^{m\times n}$ είναι άνω τριγωνικός εάν $\forall i > j$, $\alpha_{ij} = 0$. Ένας πίνακας $B = [\alpha_{ij}] \in \Re^{m\times n}$ είναι κάτω τριγωνικός εάν $\forall i - j < m - n$, $b_{ij} = 0$. Π.χ. οι πίνακες U και L πιο κάτω είναι, αντίστοιχα, πάνω και κάτω τριγωνικοί:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Πράξεις πινάκων

- Δύο πίνακες μπορούν και προστεθούν ή να αφαιρεθούν εάν έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Αν $A = [\alpha_{ij}] \in \Re^{m \times n}$, $B = [b_{ij}] \in \Re^{m \times n}$ και $C = [c_{ij}] \in \Re^{m \times n}$, τότε $C = A + B$ υπονοεί ότι $c_{ij} = \alpha_{ij} + b_{ij}$.

  Έτσι, τα στοιχεία του πίνακα C υπολογίζονται προσθέτοντας τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A και B.

  Κατά παρόμοιο τρόπο $C = A - B$, τότε $c_{ij} = \alpha_{ij} - b_{ij}$ για $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, n$.

Π.χ.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\ 2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}.$$

- Η σταθερά είναι ένας πραγματικός αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί με έναν πίνακα αντιστοιχεί με τον πολλαπλασιασμό κάθε στοιχείου του πίνακα με αυτή τη σταθερά.

Π.χ.

$$\text{Αν } k = 2 \text{ και } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \text{ τότε}$$

$$kA = \begin{pmatrix} 1 \times k & 4 \times k \\ 2 \times k & 5 \times k \\ 3 \times k & 6 \times k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

- Το εσωτερικό γινόμενο (INNER PRODUCT) είναι μια λειτουργία μεταξύ μιας γραμμής και μιας στήλης (σε αυτή τη σειρά) που περιέχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Το εσωτερικό γινόμενο υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας αντίστοιχα τα στοιχεία των δύο πινάκων και προσθέτοντάς τα στη συνέχεια. Ας θεωρήσουμε $R = [r_i] \in \Re^{1\times n}$ και $C = [c_i] \in \Re^{n\times 1}$. Το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ R και C συμβολίζεται με RC, και ορίζεται ωσ:

$$RC = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = r_1c_1 + r_2c_2 + \cdots r_nc_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_ic_i.$$

Παράδειγμα.

$$R = (1 \quad 2 \quad 3) \quad \text{και} \quad C^T = (4 \quad 5 \quad 6)\,.$$

$$RC = \sum_{i=1}^{3} r_i c_i = 4 + 10 + 18 = 32.$$

$$C^T C = \sum_{i=1}^{3} c_i c_i = \sum_{i=1}^{3} c_i^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2 = 77$$

$$\sqrt{C^T C} = \sqrt{77}.$$

- Πολλαπλασιασμος πινακων.

Δίνονται οι πίνακες $A \in \Re^{m_\alpha \times n_\alpha}$ και $B \in \Re^{m_b \times n_b}$ το γινόμενο (the matrix product) AB ορίζεται εάν $n_\alpha = m_b$. Δηλαδή, όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα A ισούνται με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα B.

Αν $C = AB$, τότε ο πίνακα C έχει $m_\alpha \times n_b$ διαστάσεις.

Για παράδειγμα αν $A \in \Re^{5\times 3}$ και $B \in \Re^{3\times 10}$, τότε $C = AB$ είναι ένας πίνακας 5×10, δηλαδή $C \in \Re^{5\times 10}$.

Οι διαστάσεις του πίνακα C πηγάζουν από:

$$(5 \times 3) \quad (3 \times 10) \to (5 \times 10).$$

Θέτουμε $A \in \Re^{m \times n}$. Οι διαστάσεις του πίνακα $A^T A$ είναι $n \times n$.

$$(n \times m) \quad (m \times n) \to (n \times n).$$

Θέτουμε $A \in \Re^{5 \times 3}$, $B \in \Re^{3 \times 10}$ και $C \in \Re^{10 \times 20}$. Οι διαστάσεις του πίνακα $D = ABC$ είναι 5×20, δηλαδή $D \in \Re^{5 \times 20}$.

$$(5 \times 3) \quad (3 \times 10) \quad (10 \times 20) \to (5 \times 20).$$

Υπολογισμός

Θέτουμε $A = [\alpha_{ij}] \in \Re^{m\times n}$, $B = [b_{ij}] \in \Re^{n\times k}$ και $C = AB$, όπου $C = [c_{ij}] \in \Re^{m\times k}$.

Το στοιχείο c_{ij} ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του πίνακα A και της γραμμής j του πίνακα B.

Έτσι, για $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, k$, το c_{ij}

υπολογίζεται ως εξής:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \alpha_{ip} b_{pj}.$$

Παράδειγμα

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και

$C = AB \in \Re^{3\times 2}$.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 30 & 9 \\ 50 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$c_{11} = (1\ \ 2)\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix} = 10 \qquad c_{12} = (1\ \ 2)\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = 5$$

$$c_{21} = (3\ \ 4)\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix} = 30 \qquad c_{22} = (3\ \ 4)\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = 9$$

$$c_{31} = (5\ \ 6)\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix} = 50 \qquad c_{32} = (5\ \ 6)\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = 13$$

Σύνθετοι πίνακες (Partitioned matrices)

Ένας σύνθετος πίνακας έχει σαν στοιχεία άλλους υπο-πίνακες. Οι υπο-πίνακες προέρχονται από το διαμερισμό των γραμμών και των στηλών του αρχικού πίνακα.

Π.χ. Θεωρήστε το διαμερισμό του $A, B \in \Re^{m \times n}$ ωσ:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} n_1 & & n_N \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{M1} & \dots & A_{MN} \end{array} \right) \begin{array}{c} m_1 \\ \\ m_M \end{array} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} n_1 & & n_N \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc} B_{11} & \dots & B_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{M1} & \dots & B_{MN} \end{array} \right) \begin{array}{c} m_1 \\ \\ m_M \end{array} \end{array},$$

όπου $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$ και $m = \sum_{i=1}^{M} m_i$.

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ισχύουν και για τους σύνθετους πίνακες *δεδομένου ότι οι υπο-πίνακες έχουν τις απαραίτητες διαστάσεις.* Π.χ. για την πρόσθεση $A+B$:

$$A+B = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \dots & A_{1N}+B_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{M1}+B_{M1} & \dots & A_{MN}+B_{MN} \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα

Θέτουμε $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$

και

$$B = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \hline 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline B_{21} \end{array}\right).$$

Τώρα,

$$C = AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{pmatrix}$$

όπου

$$\begin{aligned}
C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Έτσι, $C = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ \hline 3 & -2 \end{pmatrix}.$

Τάξη ή βαθμός ενός πίνακα

- Το σύνολο $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν κανένα δια΄νυσμα α_i δεν μπορεί να οριστεί ως γραμμικός συνδυασμός ενός άλλου διανύσματος. Αυτό είναι αντίστοιχο της μη ύπαρξεις μη-μηδενικού διανύσματος $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ έτσι ώστε $\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i = 0$. Αν $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε είναι γραμμικά συσχετισμένα.
- Ο αριθμός των ανεξάρτητων στηλών ενός πίνακα A ισούνται με τον αριθμό των ανεξάρτητων γραμμών. Ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών ενός

πίνακα ονομάζεται *τάξη στήλης* , διαφορετικά *τάξη* . Θα συμβολίζεται rank(A).

- Ο τετραγωνικός πίνακας $A \in \Re^{n\times n}$ είναι μη-ιδιάζων ή μη-ιδιόμορφος αν η rank$(A) = n$. Διαφορετικά ονομάζεται *ιδιόμορφος ή ιδιάζων* .

- Ιδιότητες
  1. $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$.
  2. $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A) = \text{rank}(AA^T)$.
  3. Η τάξη του A δεν αλλάζει με τον πολλαπλασιασμό του A με έναν μη-ιδιόμορφο πίνακα.

Παραδείγματα

- $\text{rank}(I_n) = n$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \text{rank}(A) = 3.$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \text{rank}(B) = 2.$

- $C = \begin{pmatrix} 1 & 2.001 & 0 \\ 2 & 3.999 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{rank}(C) = 3.$

- $BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 13 & 5 & 4 \\ 15 & 6 & 6 \\ 26 & 10 & 8 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{rank}(BA) = 2.$

- $C^T C = \begin{pmatrix} 30.000 & 59.999 & 10.000 \\ 59.999 & 119.996 & 19.999 \\ 10.000 & 19.999 & 5.000 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{rank}(C^T C) = 3.$

- $CC^T = \begin{pmatrix} 5.004 & 10.002 & 15.006 & 20.008 \\ 10.002 & 20.992 & 29.994 & 41.992 \\ 15.006 & 29.994 & 45.000 & 60.000 \\ 20.008 & 41.992 & 60.000 & 84.000 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rank}(CC^T) = 3.$

Ίχνος πίνακα

Για ένα τετραγωνικό πίνακα $A = [\alpha_{ii}] \in \Re^{n\times n}$ το άθροισμα των διαγώνιων του στοιχείων ονομάζεται ίχνος (trace),δηλαδή,

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}.$$

Ιδιότητες

- $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T)$.
- $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.

- $\mathrm{trace}(ABC) = \mathrm{trace}(BCA) = \mathrm{trace}(CAB)$.

- $\mathrm{trace}(A+B) = \mathrm{trace}(B+A) = \mathrm{trace}(A) + \mathrm{trace}(B)$.

- $\mathrm{trace}\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{trace}(A_i)$.

- $\mathrm{trace}(\kappa A) = \kappa \;\mathrm{trace}(A)$.

Παραδείγματα

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $A+B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\text{trace}(A) = 8, \quad \text{trace}(B) = 1 \quad$ και $\quad \text{trace}(A+B) = 9.$

Ποιο είναι το ίχνος του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων και του πίνακα συσχέτισης_;

- $AB = \begin{pmatrix} 38 & 17 & 6 \\ 13 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 11 \\ 11 & 12 & 15 \\ 18 & 20 & 23 \end{pmatrix}.$

- Δεδομένου του διανύσματος x, τότε $\text{trace}(xx^T) = \text{trace}(x^T x) = x^T x.$

- Θεωρήστε τον μη-ιδιόμορφο πίνακα Q και $z = Qx$, όπου $Q^T Q = I$. Τότε

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(zz^T) &= \operatorname{trace}(Qxx^T Q^T) = \operatorname{trace}(Q^T Q x x^T) \\ &= \operatorname{trace}(I\, xx^T) = \operatorname{trace}(x^T x) = x^T x.\end{aligned}$$

Ιδιότητες πινάκων

• Για δύο πίνακες A και B, ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ $AB = BA$. Π.χ.

$$\text{Θέτουμε} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & -1 \\ 40 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}.$$

• Αν A είναι ένας πίνακας $m \times n$, τότε $I_m A = A I_m = A$.

Π.χ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- $\boxed{(AB)^T = B^T A^T.}$

Από το τελευταίο συμπεραίνουμε ότι:

$$(ABC)^T = ((AB)C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T$$

$$\& \quad (ABCD)^T = D^T C^T B^T A^T.$$

Γενικά:

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_1^T.$$

- Π.χ. trace$(AB) =$ trace$(BA) = 19$.

Ορίζουσα

Η ορίζουσα είναι μια σταθερά και πηγάζει από τα στοιχεία ενός τετραγωνικού πίνακα. Η ορίζουσα του πίνακα A συμβολίζεται $|A|$.

Η ορίζουσα ενός πίνακα 1×1 είναι η τιμή ενός στοιχείου σε ένα πίνακα. Π.χ. Αν $A = (-3)$, τότε $|A| = -3$.

Η ορίζουσα του $A = [\alpha_{ij}] \in \Re^{2\times 2}$ δίνεται από:

$$|A| = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

Παραδείγματα

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. $\quad |A| = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2.$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. $\quad |A| = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0.$

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. $\quad |A| = -1 \times 3 + 0 \times 6 = -3.$

Συντελεστής ή Συμπλήρωμα (Cofactors)

Για *να* μπορέσετε *να* βρείτε το συντελεστή του τετραγωνικού πί*ν*ακα A, συμβολίζεται A_c, εφαρμόστε τα παρακάτω βήματα:

1. Διαγράψτε τη γραμμή i και τη στήλη j του A.

2. Βρείτε τη*ν* ορίζουσα του υπόλοιπου πί*ν*ακα, d_{ij}.

3. Υπολογίστε το στοιχείο A_c στη θέση (i,j) χρησιμοποιώ*ν*τας το*ν* τύπο $d_{ij}\,(-1)^{i+j}$.

Παράδειγμα

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$d_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 10; \quad d_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13; \quad d_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$d_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad d_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad d_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -9;$$

$$d_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad d_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 14; \quad d_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

Έτσι, $A_c = \begin{pmatrix} 10 & 13 & -4 \\ -5 & -3 & 9 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}$.

Υπολογισμός της ορίζουσας ενός πίνακα

- Επιλέξτε οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του πίνακα.

- Πολλαπλασιάστε κάθε στοιχείο της σειράς (στήλης) με τον αντίστοιχο συντελεστή και αθροίστε τα αποτελέσματα.

Παράδειγμα

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ και $A_c = \begin{pmatrix} 10 & 13 & -4 \\ -5 & -3 & 9 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}$.

Επιλέγοντας τη γραμμή 1:

$$|A| = 3 \times 10 + 1 \times 13 + 2 \times (-4) = 35.$$

Επιλέγοντας τη στήλη 2:

$$|A| = 1 \times 13 + 2 \times (-3) - 2 \times (-14) = 35.$$

Εάν ζητείται η ορίζουσα, τότε υπολογίστε μόνο τους συντελεστές στην επιλεγείσα γραμμή ή στήλη. Πάντοτε να επιλέγετε τη γραμμή ή στήλη που απλοποιεί τους υπολογισμούς σας. Συνεπώς επιλέγετε τη γραμμή ή στήλη με τα περισσότερα μηδενικά ή μονάδες.

Παράδειγμα

Υπολογίστε την ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{U}) &= 3 \times \det\begin{pmatrix}6&0&2\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix} + 0 \times \det\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix} \\
&\quad + 0 \times \det\begin{pmatrix}2&1&1\\6&0&2\\0&0&1\end{pmatrix} + 0 \times \det\begin{pmatrix}2&1&1\\6&0&2\\0&2&2\end{pmatrix} \\
&= 3 \times \left(6 \times \det\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix} + 0 \times \det\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}\right. \\
&\quad \left. + 0 \times \det\begin{pmatrix}0&2\\2&2\end{pmatrix}\right) \\
&= 3 \times 6 \times (2 \times 1 - 0 \times 2) \\
&= 36
\end{aligned}
$$

Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα δίνεται πολλαπλασιάζοντας τα στοιχεία της διαγωνίου του.

$\det(L) = 3 \times 2 \times (-1) \times 4 = -24.$

Ιδιότητες της ορίζουσας

1. Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης πίνακα A ισούνται με μηδέν, τότε $|A| = 0$.

2. Αν μια γραμμή (στήλη) πολλαπλασιάζεται με μια άλλη γραμμή (στήλη) του A, τότε $|A| = 0$.
   $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 0.$

3. Αν δύο γραμμές ή στήλες του A εναλλαγούν, τότε το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει.

$$\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 6\end{pmatrix} = 9. \qquad \det\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix} = -9.$$

4. Αν μια γραμμή, ή στήλη, του A πολλαπλασιαστεί με μια σταθερά κ, τότε η ορίζουσα του νέου πίνακα δίνεται από $\kappa\ |A|$.

5. Αν ένα πολλαπλάσιο της γραμμής (στήλης) προστεθεί σε άλλη γραμμή (στήλη), τότε η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

$$\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 6\end{pmatrix} = 9. \qquad \det\begin{pmatrix}2 & 11\\ 1 & 10\end{pmatrix} = 9.$$

Αντίστροφος ενός πίνακα

Η σχέση ενός τετραγωνικού πίνακα A και του αντίστροφου του, ορίζεται A^{-1} (αντίστροφος του A), έτσι ώστε:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Σημειώστε ότι

- Ο πίνακας A πρέπει να είναι τετραγωνικός.
- Οι διαστάσεις του A και A^{-1} είναι ίδιες.
- Μόνο μη-ιδιόμορφοι πίνακες έχουν αντίστροφο.

Υπολογισμός αντιστρόφου ενός πίνακα

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι να υπολογίσετε τον αντίστροφο ενός πίνακα. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των συντελεστών:

1. Υπολογίστε το συντελεστή A_c από A.
2. Υπολογίστε τον *Προσκείμενο πίνακα (Adjoint matrix)* A_j από $A_j = A_c^T$.
3. Για $|A| \neq 0$, ο αντίστροφος του A δίνεται από:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_j.$$

Παραδείγματα

- Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, όπου $|A| = 2.(-1) - 1.3 = -5.$

Ο $A_c = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ και $A_j = A_c^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Έτσι, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_j = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Σημειώστε ότι $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$.

- Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

  Τώρα, $|A| = 35$, $\quad A_c = \begin{pmatrix} 10 & 13 & -4 \\ -5 & -3 & 9 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}$

  και ο προσκείμενος πίνακας δίνεται από
  $A_j = A_c^T = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 13 & -3 & -14 \\ -4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

  Έτσι, $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{35} \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 13 & -3 & -14 \\ -4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

Σημειώστε ότι $A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$.

Διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan.

Η διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του αντίστροφου ενός πίνακα. Θεωρήστε τον πίνακα $m \times m$, A.

Δημιουργήστε τον επαυξημένο πίνακα $(A \mid I_m)$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss στον επαυξημένο πίνακα έτσι ώστε A να μετασχηματιστεί σε I_m. Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε τον πίνακα $(I_m \mid A^{-1})$.

Η μέθοδος απαλοιφής Gauss-Jordan μετασχηματίζει τον $(A \mid I_m)$ σε $(I_m \mid A^{-1})$ εφαρμόζοντας δύο βασικές διαδικασίες:

1. Πολλαπλασιάζουμε τις γραμμές με μια μη-μηδενική σταθερά και

2. Τα μη-μηδενικά αποτελέσματα του γινομένου μιας σειράς προστίθενται σε μια άλλη σειρά.

Ιδιότητες αντίστροφου

- Ο αντίστροφος ενός συμμετρικού πίνακα είναι επίσης συμμετρικός.

$$\text{Εάν } S = \begin{pmatrix} 2.7 & 6.4 & -3.2 \\ 6.4 & 5.2 & 1.1 \\ -3.2 & 1.1 & 3.1 \end{pmatrix}.\ S^{-1} = \begin{pmatrix} -0.08 & 0.13 & -0.13 \\ 0.13 & 0.01 & 0.13 \\ -0.13 & 0.13 & 0.15 \end{pmatrix}$$

- Ο αντίστροφος του A^T είναι ο ανάστροφος του A^{-1}. Έτσι,

$$\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (A^T)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

- Θέτουμε $A_1, \ldots, A_n \in \Re^{n\times n}$. Έτσι,

$$\boxed{(A_1 A_2 \cdots A_n)^{-1} = (A_n^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}).}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \; AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \; B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 5 & -5 & 0 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix} = B^{-1}A^{-1}.$$

- Αν c είναι μια μη-μηδενική σταθερά, τότε

$$\boxed{(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{5} \quad \text{και} \quad (cA)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

- Ο αντίστροφος ενός διαγώνιου πίνακα είναι επίσης διαγώνιος αποτελούμενος από τους αντίστροφους των αρχικών στοιχείων. Π.χ.

$$D = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}; \; D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s_{nn}} \end{pmatrix}$$

$D = \mathrm{diag}(1, 10^4, 10^{15}, 10^{16})$.

$D^{-1} = \mathrm{diag}(1, 10^{-4}, 10^{-15}, 10^{-16})$.

Υπολογισμός από Octave (Matlab):

$D^{-1} = \text{diag}(1, 0.00010, 0.00000, 0.00000).$

$\text{rank}(D) = 4 \quad \text{και} \quad \text{rank}(D^{-1}) = 3.$

- Ο αντίστροφος ενός τριγωνικού πίνακα είναι επίσης τριγωνικός.

  Θέτουμε

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Τότε,

$$U^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad L^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Σύστημα εξισώσεων

Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων $n \times n$ που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha_{11}x_1 & +\alpha_{12}x_2 & +\ldots & +\alpha_{1n}x_n & = b_1 \\
\alpha_{21}x_1 & +\alpha_{22}x_2 & +\ldots & +\alpha_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\alpha_{n1}x_1 & +\alpha_{n2}x_2 & +\ldots & +\alpha_{nn}x_n & = b_n
\end{array}$$

μπορεί να γραφτεί σε μορφή πίνακα ως

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\text{ή} \quad Ax = b \tag{2}$$

Υποθέστε ότι οι εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έτσι ο A είναι μη-ιδιόμορφος. Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές (2) με A^{-1}

έχουμε:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \text{ή} \qquad x = A^{-1}b$$

αφού $A^{-1}A\,x = I_n\,x = x$.

Έτσι, η λύση του (2) δίνεται από $\boxed{x = A^{-1}b}$.

Παράδειγμα

Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = 9 \end{array}$$

Γράφουμε τα πιο πάνω συστήματα σε μορφή πινάκων 3×3 ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \text{ή} \qquad Ax = b$$

Στάδιο 1 Υπολογίστε τον αντίστροφο του πίνακα A:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Στάδιο 2 Υπολογίστε $A^{-1}b$:

$$A^{-1}b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος εξισώσεων δίνεται από $x = A^{-1}b = (3 \quad -2 \quad 1)^T$. Έτσι,

$$\boxed{x_1 = 3, \quad x_2 = -2 \quad \text{και} \quad x_3 = 1.}$$

Σύστημα εξισώσεων

Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\text{ή} \qquad Ax = b \qquad \text{με λύση} \qquad x = A^{-1}b. \qquad (4)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3) μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Δηλαδή, το b είναι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A, και x είναι οι συντελεστές αυτού του συνδυασμού που πρέπει να προσδιοριστούν.

Παράδειγμα

Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & =3 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & =-1 \end{array}$$

Γράφουμε τα πιο πάνω συστήματα σε μορφή πινάκων 3×3 ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

με λύση $x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \quad$ και $\quad x_3 = 0.$

Παράδειγμα

Έστω $A = (\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \ldots \;\; \alpha_n)$ όπου α_i είναι η i-οστή στήλη του A. Βρείτε τη λύση $Ax = (\alpha_1 - \alpha_n + 3\alpha_2)$.

Λύση:

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_{n-1}\alpha_{n-1} + x_n\alpha_n = \alpha_1 - \alpha_n + 3\alpha_2.$
Αυτό σημαίνει ότι $x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_n = -1, \quad$ και $x_3 = x_4 = \ldots x_{n-1} = 0.$

Λύση τριγωνικών συστημάτων εξισώσεων

Θεωρήστε το **άνω τριγωνικό** σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{rrrl} 4x_1 & +5x_2 & +x_3 & = 1 \\ & +3x_2 & +4x_3 & = 2 \\ & & 2x_3 & = -2 \end{array}$$

Η τελευταία εξίσωση του συστήματος δίνει $x_3 = -1$.

Αντικαθιστώντας το x_3 στη 2η εξίσωση δίνει $x_2 = (2 - 4x_3)/3 = 2$.

Αντικαθιστώντας το x_3 και x_2 στη 1η εξίσωση δίνει $x_1 = (1 - 5x_2 - x_3)/4 = -2$.

Θεωρήστε το **κάτω τριγωνικό** σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{llll} 4x_1 & & & = 8 \\ 2x_1 & +3x_2 & & = 7 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 3 \end{array}$$

Η 1η εξίσωση του συστήματος δίνει $x_1 = 2.$

Αντικαθιστώντας το x_1 στη 2η εξίσωση δίνει $x_2 = (7 - 2x_1)/3 = 1.$

Αντικαθιστώντας το x_1 και x_2 στη 3η εξίσωση δίνει $x_3 = (3 - x_1 - x_2)/2 = 0.$

Λύση τριγωνικών συστημάτων εξισώσεων

Θεωρήστε το **άνω τριγωνικό** σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & U_{1,n-1} & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & U_{2,n-1} & U_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_{n-1,n-1} & U_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

Η προς τα πίσω μέθοδος (Backward method) η οποία βρίσκει τις τιμές του x $(i = n, n-1, \ldots, 1)$ δίνεται από:

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{i,j}\, x_j)/U_{ii}$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με:

$$x_n = b_n/U_{n,n}$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - U_{n-1,n}\, x_n)/U_{n-1,n-1}$$

$$x_{n-2} = (b_{n-2} - U_{n-2,n-1}\, x_{n-1} - U_{n-2,n}\, x_n)/U_{n-2,n-2}$$

$$\vdots$$

Θεωρήστε το **κάτω τριγωνικό** σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} L_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{n-1,1} & L_{n-1,2} & \dots & L_{n-1,n-1} & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & L_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

Η προς τα εμπρός μέθοδος (Forward method) η οποία βρίσκει τις τιμές του x ($i = 1, 2, \ldots, n$) δίνεται από:

$$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j}\, x_j)/L_{ii}.$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με:

$$x_1 = b_1/L_{1,1}$$

$$x_2 = (b_2 - L_{2,1}\, x_1)/L_{2,2}$$

$$x_3 = (b_3 - L_{3,1}\, x_1 - L_{3,2}\, x_2)/L_{3,3}$$

$$\vdots$$

Διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan.

Η διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan μπορεί να χρησιμοποιηθεί για για να βρει την λύση ενός συστήματος εξισώσεων. Θεωρήστε το συστήμα εξισώσεων $Ax = b$, όπου ο $A \in \Re^{n\times n}$ και $x, b \in \Re^{n}$.

Δημιουργήστε τον επαυξημένο πίνακα $(A \mid b)$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan στον επαυξημένο πίνακα έτσι ώστε ο A στον επαυξημένο πίνακα $(A \mid b)$ να μετασχηματιστεί σε I_n. Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε τον πίνακα $(I_n \mid x)$ όπου x είναι η λύση του συστήματος.

Η μέθοδος απαλοιφής Gauss-Jordan μετασχηματίζει τον A σε I_n εφαρμόζοντας δύο βασικές διαδικασίες:

1. Πολλαπλασιάζουμε τις γραμμές με μια μη-μηδενική σταθερά και

2. Τα μη-μηδενικά αποτελέσματα του γινομένου μιας σειράς προστίθενται σε μια άλλη σειρά.

Παράδειγμα 1:

Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{lllr} 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 10 \\ 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = 8 \\ 4x_1 & & +5x_3 & = 2 \end{array}$$

Γράφουμε τα πιο πάνω συστήματα όπως ο επαυξημένος πίνακα $(A \mid b)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

ΣΤΑΔΙΟ 1

$$R1 \leftarrow \tfrac{1}{2}R1 \qquad R2 \leftarrow R2 - 2R1 \ \& \ R3 \leftarrow R3 - 4R1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -18 \end{array}\right)$$

ΣΤΑΔΙΟ 2

$$R1 \leftarrow R1 - R2 \quad \& \quad R3 \leftarrow R3 + 4R2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right)$$

ΣΤΑΔΙΟ 3

$R3 \leftarrow \frac{1}{13}R3$ $R1 \leftarrow R1 + 2R3$ & $R2 \leftarrow R2 - 3R3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Έτσι, η λύση του συστήματος είναι:

$x_1 = 3$, $x_2 = 4$ και $x_3 = -2$.

Παράδειγμα 2:

Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 2 \\ 6x_1 & +3x_2 & -9x_3 & = 6 \\ 7x_1 & +14x_2 & -21x_3 & = 13 \end{array}$$

Γράφουμε τα πιο πάνω συστήματα όπως ο επαυξημένος πίνακα $(A \mid b)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 6 \\ 7 & 14 & -21 & 13 \end{array}\right)$$

ΣΤΑΔΙΟ 1

$$R2 \leftarrow R2 - 6R1 \quad \& \quad R3 \leftarrow R3 - 7R1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -9 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Στην τελευταία σειρά τα στοιχεία είναι όλα μηδενικά εκτός από το τελευταίο στα δεξιά. Δηλαδή, $0 = -1$. Ως εκ τούτου, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σύστημα των εξισώσεων δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 3:

Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{rrrl} & 4x_2 & +x_3 & = 2 \\ 2x_1 & +6x_2 & -2x_3 & = 3 \\ 4x_1 & +8x_2 & -5x_3 & = 4 \end{array}$$

Γράφουμε τα πιο πάνω συστήματα όπως ο επαυξημένος πίνακα $(A \mid b)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -5 & 4 \end{array} \right)$$

Η 1η και 2η σείρα εναλλάσσονται, δηλ. $R1 \leftrightarrow R2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

Μετά τα 2 Στάδια της μεθόδου δίνει:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Το τελευταίο αντιστοιχεί στο σύστημα:
$x_1 - \frac{7}{4}x_3 = 0$ και $x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{1}{2}$.

Αυτό μπορεί να εκφραστεί ως:
$x_1 = \frac{7}{4}x_3$ και $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_3$.

Επειδή δεν υπάρχει καμία συγκεκριμένη τιμή για το x_3, μπορεί να επιλέγεται τυχαία. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις για αυτό το σύστημα. Μπορούμε να αντιπροσωπεύουν όλες τις λύσεις ως εξής:

$$\boxed{x_1 = \frac{7}{4}x_3, \qquad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_3 \qquad \text{και} \qquad x_3 \text{ τυχαία.}}$$

Οποιαδήποτε τιμή x_3 μας δίνει ένα διάλυμα του συστήματος. Για παράδειγμα,

$x_3 = 4$ δίνει τη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (7, -1/2, 4)$.

$x_3 = -2$ δίνει τη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (-7/2, 1, -2)$.

$x_3 = 0$ δίνει τη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1/2, 0)$.

Διαδικασία απαλοιφής Gaussian

Η διαδικασία απαλοιφής Gaussian μπορεί να χρησιμοποιηθεί για για να βρει την λύση ενός συστήματος εξισώσεων. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gaussian στον επαυξημένο πίνακα $(A \mid b)$ έτσι ώστε ο A να μετασχηματιστεί σε άνω τριγωνικό.

Στη συνέχεια το τριγωνικό σύστημα λύνεται με αντικατάσταση.

Παράδειγμα:

Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & -3x_2 & +x_3 & = 4 \\ 2x_1 & -8x_2 & +8x_3 & = -2 \\ -6x_1 & +3x_2 & -15x_3 & = 9 \end{array}$$

Γράφουμε τα πιο πάνω συστήματα όπως ο επαυξημένος πίνακα $(A \mid b)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & -8 & 8 & -2 \\ -6 & 3 & -15 & 9 \end{array}\right)$$

ΣΤΑΔΙΟ 1

$$R2 \leftarrow R2 - 2R1 \quad \& \quad R3 \leftarrow R3 + 6R1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & -10 \\ 0 & -15 & -9 & 33 \end{array}\right)$$

ΣΤΑΔΙΟ 2

$$R2 \leftarrow -\tfrac{1}{2}R2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -15 & -9 & 33 \end{array}\right)$$

$$R3 \leftarrow R3 + 15R2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -54 & 108 \end{array}\right)$$

Το τελευταίο αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & -3x_2 & +x_3 & = 4 \\ & x_2 & -3x_3 & = 5 \\ & & -54x_3 & = 108 \end{array}$$

Η τελευταία εξίσωση δίνει $x_3 = -2$.

Αντικαθιστώντας αυτό σε δεύτερη εξίσωση δίνει $x_2 = -1$.

Χρησιμοποιώντας και τα δύο αυτά τα αποτελέσματα στην πρώτη εξίσωση δίνει $x_1 = 3$.

Παραγοντοποίηση LU

Η Παραγοντοποίηση LU (ή τριγωνική Παραγοντοποίηση) χρησιμοποιείται για την επίλυση συστήματος εξισώσεων.

Θεωρήστε το συστήμα εξισώσεων $Ax = b$, όπου ο $A \in \Re^{n\times n}$ και $x, b \in \Re^{n}$. Ο πίνακας του συστήματος A γράφεται ως το γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L (L για Lower Triangular) και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U (U για Upper Triangular).

Δηλαδή $\quad A = LU.$

Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του L είναι 1.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{ccc} A & = & L \quad\quad U \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & = & L \quad\quad U \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Για τη λύση των γραμμικών εξισώσεων $Ax = b$, όπου $A = LU$ παρατηρήστε ότι $L(Ux) = b$ είναι το ισοδύναμο του $Lz = b$, όπου $Ux = z$.

Έτσι, η λύση του $Ax = b$ δίνεται σε τρία στάδια:

1. Υπολογίζουμε την παραγοντοποίηση LU: $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.
2. Λύνουμε το σύστημα κάτω-τριγωνικών $\mathbf{Lz} = \mathbf{b}$ για $\mathbf{z}$.
3. Λύνουμε το σύστημα άνω-τριγωνικών $\mathbf{Ux} = \mathbf{z}$ για $\mathbf{x}$.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 4 \\ 2x_2 & -5x_2 & +12x_3 & = 6 \\ & 2x_2 & -10x_3 & = 3 \end{array}$$

or

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Τώρα η παραγοντοποίηση LU δίνεται από:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Λύνουμε $\mathbf{Lz} = \mathbf{b}$, όπου

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Λύνουμε $\mathbf{Ux} = \mathbf{z}$, όπου

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Ορθογώνιοι πίνακες (Orthogonal matrices)

Ένας τετραγωνικός πίνακας $Q \in \Re^{m\times m}$ είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν

$$\boxed{Q^T Q = Q Q^T = I_m.}$$

Σημειώστε ότι ο αντίστροφος του Q δίνεται από Q^T.

Παραδείγματα ορθογώνιων πινάκων:

$$I_m, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ιδιότητα

- Διατηρεί τη νόρμα (εσωτερικό γινόμενο) ενός διανύσματος.

  Έτσι, αν $z = Qx$ και Q είναι ορθογώνιοι, τότε $z^T z = x^T x$.

  Σημειώστε $z^T z = (Qx)^T (Qx) = x^T Q^T Q x = x^T I x = x^T x$.

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.866 \\ -0.866 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

$$z = Qx = \begin{pmatrix} 2.098 \\ 2.366 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad x^T x = 10 = z^T z.$$

Πινακες Μετάθεσης (Permutation Matrices)

Μετάθεση ν αριθμών ονομάζεται μια τυχαία εναλλαγή της σειράς τους.

Το σύνολο των πιθανών μεταθέσεων n στοιχείων είναι $n!$.

Ο πίνακας Μετάθεσης είναι ένας πίνακας που λαμβάνεται με μεταθέσεις των γραμμων του I_n σύμφωνα με κάποιες μεταθέσεις των αριθμών 1 έως n.

Ως εκ τούτου κάθε γραμμή και στήλη του πίνακα μετάθεσης περιέχει ακριβώς ένα μόνο 1 και με 0 παντού.

Υπάρχουν επομένως $n!$ πίνακες Μετάθεσης.

Οι πίνακες Μετάθεσης 2×2 δίνονται από:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες Μετάθεσης 3×3 δίνονται από:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του πίνακα Μετάθεσης είναι ± 1 , έτσι, έχει αντιστρόφο.

Ο πίνακας Μετάθεσης P , είναι ορθογώνιος, δηλαδή $P^T P = PP^T = I$.

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακας Μετάθεσης P από τα αριστερά του A , τότε ο PA εναλλάσσει τις σειρές του A.

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακας Μετάθεσης P από τα δεξιά του A , τότε ο AP εναλλάσσει τις στήλες του A.

Παραδείγματα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,1} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,1} \end{pmatrix}$$

Πινακες Επιλογής (Selection Matrices)

Έστω ο S υποδηλώνει ένα πίνακα που περιλαμβάνει μερικές στήλες του I_n. Αν ο A είναι ένας πίνακας $m \times n$, τότε ο AS επιλέγει τις αντίστοιχες στήλες του A.

<u>Παράδειγμα</u>

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \\ \alpha_{5,1} & \alpha_{5,2} & \alpha_{5,3} & \alpha_{5,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,2} & \alpha_{4,4} \\ \alpha_{5,2} & \alpha_{5,4} \end{pmatrix}$$

Έστω ο S υποδηλώνει ένα πίνακα που περιλαμβάνει μερικές γραμμές του I_m. Αν ο A είναι ένας πίνακας $m \times n$, τότε ο SA επιλέγει τις αντίστοιχες γραμμές του A.

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \\ \alpha_{5,1} & \alpha_{5,2} & \alpha_{5,3} & \alpha_{5,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \\ \alpha_{5,1} & \alpha_{5,2} & \alpha_{5,3} & \alpha_{5,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,3} \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα: Ορθογώνιοι πίνακες

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^T A = AA^T = I_n$.

Σημειώστε, ότι τα διανύσματα γραμμές του A είναι ορθοκανονικά.

Επίσης τα διανύσματα στήλες του A είναι ορθοκανονικά.

Παραγοντοποίηση (Cholesky Decomposition)

Η παραγοντοποίηση Cholesky ενός συμμετρικού θετικά-ορισμένου $n \times n$, πίνακα A, δίνεται από

$$A = LL^T,$$

όπου $L \in \Re^{n\times n}$ είναι κάτω τριγωνικός και αντιστρέψιμος (μη-ιδιάζων). Π.χ.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}.$$

Θέτουμε $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Η παραγοντοποίηση Cholesky του $A = LL^T$ δίνεται από:

$$A = LL^T = \begin{pmatrix} 2.24 & 0 & 0 \\ 0.89 & 3.03 & 0 \\ 1.34 & -0.07 & 0.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.24 & 0.89 & 1.34 \\ 0 & 3.03 & -0.07 \\ 0 & 0 & 0.44 \end{pmatrix}$$

Βρέστε τη λύση των γραμμικών εξισώσεων $Ax = b$, όπου A είναι συμμετρικός και η παραγοντοποίηση Cholesky ορίζεται $A = LL^T$.

Παρατηρήστε ότι $L(L^T x) = b$ είναι το ισοδύναμο του $Lz = b$, όπου $L^T x = z$. Έτσι, η λύση του $Ax = b$ δίνεται σε τρία στάδια:

1. Υπολογίζουμε την παραγοντοποίηση Cholesky $A = LL^T$.

2. Λύνουμε το σύστημα κάτω-τριγωνικών $Lz = b$ για z.

3. Λύνουμε το σύστημα άνω-τριγωνικών $L^T x = z$ για x.

Παράδειγμα:

Λύνουμε $Ax = b$, όπου $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. $A = LL^T$, όπου $L = \begin{pmatrix} 2.24 & 0 & 0 \\ 0.89 & 3.03 & 0 \\ 1.34 & -0.07 & 0.44 \end{pmatrix}$.
2. Λύνουμε $Lz = b$ το οποίο δίνει $z = \begin{pmatrix} 3.13 \\ 6.19 \\ 0.88 \end{pmatrix}$.
3. Λύνουμε $L^T x = z$ το οποίο δίνει $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Θεωρήστε τους χρηματοοικονομικούς δείκτες:

X_1	13	10	10	8	7	6	5	4	2	0	-1	-3
X_2	4	6	2	-2	4	-3	0	2	-1	-5	-1	-4

οι οποίοι έχουν πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων ως ακολούθως:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 23.90 & 12.40 \\ 12.40 & 11.97 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, αν $X = (X_1 \quad X_2)$, τότε $\mathrm{Var}(X) = S$.

Βρέστε τον πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων του XL^{-T}, όπου L είναι ο παράγοντας Cholesky του X, δηλαδή,

$$L = \begin{pmatrix} 4.89 & 0 \\ 2.51 & 2.38 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 0.20 & 0 \\ -0.22 & 0.42 \end{pmatrix}.$$

Τώρα, XL^{-T} δίνει:

X_1	2.7	2.0	2.0	1.6	1.4	1.2	1.0	0.8	0.4	0	-0.2	-0.6
X_2	-1.1	0.4	1.3	2.6	0.2	-2.5	-1.1	-0.0	-0.8	-2.1	-0.2	-1.0

Ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων δίνεται από:

$$\mathbf{S_T} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Σημειώστε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(XL^{-T}) &= L^{-1}\mathrm{Var}(X)L^{-T} \\ &= L^{-1}SL^{-T} \\ &= L^{-1}LL^{T}L^{-T} \\ &= I_2. \end{aligned}$$

Παραγοντοποίηση QR

Θεωρούμε ότι $A \in \Re^{m\times n}$ $(m \geq n)$ έχει πλήρη τάξη (βαθμό) στηλών.

Η ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ QR του A έχει τη μορφη:

$$\boxed{A = QR,}$$

όπου $R \in \Re^{n\times n}$ είναι άνω τριγωνικός και $Q \in \Re^{m\times m}$ είναι ορθογώνιος.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 8 \\ -9 & 7 & 3 \\ -13 & -14 & 17 \\ 4 & 3 & -13 \\ -4 & 1 & 16 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 18.6 & 7.69 & -23.00 \\ 0 & -14.14 & 5.60 \\ 0 & 0 & 15.04 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{και } Q = \begin{pmatrix} -0.43 & -0.09 & -0.09 & 0.55 & -0.70 \\ -0.48 & -0.76 & -0.26 & -0.28 & 0.20 \\ -0.70 & 0.61 & -0.17 & -0.05 & 0.33 \\ 0.22 & -0.10 & -0.50 & 0.68 & 0.48 \\ -0.22 & -0.19 & 0.80 & 0.38 & 0.35 \end{pmatrix}.$$

$$Q^T Q = QQ^T = I_5 \quad \text{και} \quad A = QR.$$

Λύστε το πρόβλημα γραμμικών εξισώσεων $Ax = b$ χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση QR, όπου $A \in \Re^{n \times n}$ είναι μη-ιδιόμορφος.

Θεωρούμε $A = QR$.

Το σύστημα $Ax = b$ μπορεί να γραφτεί ως $QRx = b$.

Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές με Q^T παίρνουμε:

$$Q^T QRx = Q^T b$$

Καθώς $Q^T Q = I_n$ το πιο πάνω ισούνται με

$$Rx = Q^T b.$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$A = QR = \begin{pmatrix} -0.81 & 0.27 & -0.52 \\ -0.32 & -0.95 & 0.02 \\ -0.49 & 0.18 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6.16 & -5.35 & -3.73 \\ 0 & -8.74 & 0.23 \\ 0 & 0 & 0.17 \end{pmatrix}$$

$$Q^T b = \begin{pmatrix} -2.92 \\ 17.93 \\ 0.33 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Rx = Q^T b \quad \text{δίνει} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε ότι QRD του A δίνεται από $A = QR$ και $c = Q^T b$.

Το σύστημα $Ax = b$ μπορεί να γραφτεί ως $QRx = b$.

Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές του πιο πάνω με Q^T παίρνουμε:

$$\begin{aligned} Ax = b &\to QRx = b \\ &\to Q^T QRx = Q^T b \\ &\to I_n Rx = c \\ &\to Rx = c. \end{aligned}$$

Έτσι, η λυση του $Ax = b$ δίνεται με τη λύση του τριγωνικού συστήματος

$Rx = c,$ όπου $c = Q^T b.$

Παραγοντοποίηση RQ

Θεωρούμε ότι $A \in \Re^{m\times n}$ $(n \geq m)$ έχει πλήρη τάξη γραμμής. Η παραγοντοποιηση RQ του A έχει τη μορφή:

$$AP = (R \quad 0) \ , \quad \text{ή} \quad A = R\widetilde{P}^T,$$

όπου

- $R \in \Re^{m\times m}$ είναι άνω τριγωνικός,
- $P \in \Re^{n\times n}$ είναι ορθογώνιος και $P = \begin{array}{cc} m & n-m \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{cc} \widetilde{P} & \widehat{P} \end{array} \right)} \end{array}$.

Πλήρης Παραγοντοποίηση QR

Θεωρήστε τον πίνακα $A \in \Re^{m \times n}$ $(m \geq n)$ με τάξη $k < n$, π.χ. ο A δεν έχει πλήρη τάξη στήλης. Η πλήρης QRD του A δίνεται από:

$$
Q^T AP = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} k \\ m-k \end{array} \end{array}
$$

ή

$$
A = \widetilde{Q} R \widetilde{P}^T,
$$

όπου

- $R \in \Re^{k\times k}$ είναι άνω τριγωνικός,
- $Q \in \Re^{m\times m}$ είναι ορθογώνιος και $Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & m-k \end{array} \\ \begin{pmatrix} \widetilde{Q} & \widehat{Q} \end{pmatrix} \end{array}$.
- $P \in \Re^{n\times n}$ είναι ορθογώνιος και $P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{pmatrix} \widetilde{P} & \widehat{P} \end{pmatrix} \end{array}$.

Γενικευμένη παραγοντοποίηση QR

Θεωρήστε τον πίνακα πλήρους τάξης $A \in \Re^{m\times n}$ και $B \in \Re^{m\times m}$. Η Γενικευμένη παραγοντοποίηση QR (Generalized QR Decomposition (GQRD)) του A και B δίνεται από:

$$\boxed{Q^T A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ m-n \end{matrix}, \quad \text{και} \quad Q^T BP = W,}$$

όπου

- $R \in \Re^{n\times n}$ και $W \in \Re^{m\times m}$ είναι άνω τριγωνικός.
- $Q, P \in \Re^{m\times m}$ είναι ορθογώνιοι.

Θεωρήστε $B \in \Re^{m\times k}$, όπου $m \geq k$ και $\text{rank}(B) = k$. Η GQRD του A και B δίνεται από:

$$Q_*^T A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} n \\ m-n \end{array},$$

$$\text{και} \qquad Q_*^T B P_* = W \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & p \end{array} \\ \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ 0 & W_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ n \\ p \\ m-n-p \end{array},$$

- $R \in \Re^{n\times n}$ και $W_{22} \in \Re^{p\times mp}$ είναι άνω τριγωνικός.
- $Q_*, P_* \in \Re^{m\times m}$ είναι ορθογώνιοι και $\text{rank}(A\ B) = n+p$.

Παραγοντοποίηση Ιδιάζουδας Τιμής

Θέτουμε $A \in \Re^{m \times n}$ πίνακα τάξης k.

Η παραγοντοποίηση ιδιάζουσας τιμής (Singular Value Decomposition (SVD)) του A δίνεται από:

$$\boxed{A = Q\Sigma P^T,}$$

- όπου $Q \in \Re^{m \times m}$ και $P \in \Re^{n \times n}$ είναι ορθογώνιοι,

- $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

- $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$ και $\sigma_{k+1} = \dots \sigma_n = 0.$

- Η τάξη του A είναι k.

- Το σ_i ονομάζεται η ith ιδιάζων τιμή του A.

- Αν $Q = (q_1, \ldots q_m)$ και $P = (p_1, \ldots p_m)$, τότε q_i και p_i ονομάζονται τα αριστερά και δεξιά ιδιάζων διανύσματα που σχετίζονται με σ_i ($i = 1, \ldots, k$).

- Ο δείκτης $\kappa(A) = \sigma_1/\sigma_n$ ονομάζεται αριθμός κατάστασης (condition number) του A.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 8 \\ 2 & 12 & -11 \\ -6 & -17 & 10 \\ 19 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 31.71 & 0 & 0 \\ 0 & 19.80 & 0 \\ 0 & 0 & 16.99 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} -0.49 & -0.05 & -0.11 & 0.51 & -0.70 \\ 0.49 & 0.29 & 0.02 & 0.80 & 0.22 \\ -0.63 & -0.15 & -0.23 & 0.26 & 0.68 \\ 0.23 & -0.93 & 0.20 & 0.19 & 0.01 \\ -0.27 & 0.15 & 0.94 & 0.06 & 0.09 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.46 & -0.88 & -0.15 \\ 0.68 & 0.23 & 0.70 \\ -0.58 & -0.42 & 0.70 \end{pmatrix}.$$

Ο όρος του A δίνεται από

$$\sigma_1/\sigma_3 = 31.77/16.99 = 1.87.$$

Θεωρήστε τους πίνακες:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2.01 & 0 \\ 2 & 3.99 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2.1 & 0 \\ 2 & 3.9 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \\ 4 & 16 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cond(A_0)=8.82e+16, Cond(A_1)=2124.5,
Cond(A_2)=213.02, Cond(A_3)=17.77, και Cond(I_n)=n.

Λύστε το πρόβλημα εξισώσεων $Ax = b$ χρησιμοποιώντας τη SVD, όπου $A \in \Re^{n \times n}$ είναι μη-ιδιόμορφο

Η SVD του A δίνεται από $A = Q\Sigma P^T$, όπου $Q, P \in \Re^{n \times n}$ είναι ορθογώνιοι και $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Τώρα, πολλαπλασιάζουμε το σύστημα $Ax = b$ με Q^T και εισαγάγουμε $PP^T = I_n$ μεταξύ Ax και παίρνουμε:

$$Q^T APP^T x = Q^T b, \quad \text{ή} \quad \Sigma y = c,$$

όπου

$$Q^T AP = \Sigma, \quad y = P^T x \quad \text{και} \quad c = Q^T b.$$

Σημειώστε ότι $P^T x = y$ ισούνται με $PP^T x = Py$, ή $x = Py$.

Έτσι, λύνοντας το διαγώνιο σύστημα $\Sigma y = c$ για y, η λύση του συστήματος $Ax = b$ υπολογίζεται από $x = Py$.

Το πρόλημα των Ιδιοτιμών

Θέτουμε A τον τετραγωνικό πίνακα $n \times n$, $x \neq 0$ να είναι ένας πίνακας στήλης n-στοιχείων και λ να είναι μια σταθερά.

Το προλημα Ιδιοτιμων (The Eigenvalue problem) είναι η λύση στο:

$$Ax = \lambda x.$$

Η λύση είναι σε ζευγάρια: για κάθε λ αντιστοιχεί ένα x διάνυσμα.

Τα λ'ς είναι γνωστά ως ιδιοτιμές (ή ιδιοποσά (latent), ή χαρακτηριστικές τιμές) και τα x's ως ιδιοδιανύσματα (ή ιδιοποσά, ή, χαρακτηριστικά διανύσματα).

Σε μορφή πινάκων το πρόβλημα ιδιοτιμών μπορεί να γραφτεί ως:

$$(A - \lambda I_n)x = 0$$

Για να ισχύει $x \neq 0$ υπονοείται ότι

$$|A - \lambda I_n| = 0.$$

Η πιο πάνω είναι γνωστή ως χαρακτηριστική εξίσωση του A. Παράγει μια πολυωνυμική εξίσωση αγνώστου λ.

Παράδειγμα

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ έτσι ώστε $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$.

Τώρα, $|A - \lambda I_2| = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$.

Έτσι, $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$ είναι οι ιδιοτιμές του A.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ έχουμε $Ax = \lambda_1 x$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

ή

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_1 &= -2x_2. \end{aligned}$$

Έτσι, ένα ιδιοδιάνυσμα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ δίνεται από $x = (-2 \quad 1)^T$.

Κανονικοποιώντας το x, δηλαδή, διαιρώντας κάθε στοιχείο με $\sqrt{x^T x}$, μας δίνει το ιδιοδιάνυσμα

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα που σχετίζεται με την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ δίνεται από $(0 \quad 1)^T$.

Ιδιότητες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Δίνεται ο $m \times m$ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ πίνακας, π.χ. ο πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί.

  Οι ιδιοτιμές του A δίνονται από:

  $\lambda_1 = 0.14, \quad \lambda_2 = 5.70 \quad \text{and} \quad \lambda_3 = 11.16.$

- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ξεχωριστές ιδιοτιμές είναι κατά ζεύγοι ορθογώνια.

Δηλαδή, αν x_1 και x_2 είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), τότε $x_1^T x_2 = 0$.

- Σημειώστε ότι $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, και πολλαπλασιάζοντας με x_2^T μας δίνει

$$x_2^T A x_1 = \lambda_1 x_2^T x_1 .$$

Κατά παρόμοιο τρόπο, $x_1^T A x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2$. Εφόσον $x_2^T A x_1 = x_1^T A x_2$ συμπαιρένουμε ότι $\lambda_1 x_2^T x_1 = \lambda_2 x_1^T x_2$ και έστι, $x_1^T x_2 = 0$ (όταν $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

- Τα ιδιοδιανύσματα του A είναι οι στήλες του $X = (x_1, x_2, x_3)$, όπου

$$X = \begin{pmatrix} -0.532 & 0.747 & 0.400 \\ 0.022 & -0.459 & 0.888 \\ 0.847 & 0.481 & 0.228 \end{pmatrix}$$

και

$$X^T X = X X^T = I_3.$$

- Το πρόβλημα ιδιοτιμών σε μορφή πίνακα είναι ισότιμο με

$$AX = X\Lambda$$

Πολλαπλασιάζονταος με X^T δίνει

$$X^T A X = X^T X \Lambda$$

που είναι αντίστοιχο του $X^T A X = \Lambda$ καθώς $X^T X = I_m$.

- Έτσι,

$$\boxed{X^T A X = \Lambda,}$$

όπου $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ και $X = (x_1 \ldots x_m)$.

$$X^T A X = \begin{pmatrix} 0.14 & 0 & 0 \\ 0 & 5.70 & 0 \\ 0 & 0 & 11.16 \end{pmatrix} = \Lambda$$

- Ο πίνακας A είναι ιδιάζων αν μία από τις ιδιοτιμές του είναι μηδέν.

- Η τάξη του A ισούνται με τον αριθμό των μη-μηδενικών ιδιοτιμών.

- $A^2 = AA = X\Lambda^2 X^T$ και γενικά $A^n = X\Lambda^n X^T$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 38 & 33 & 23 \\ 33 & 105 & 18 \\ 23 & 18 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \Lambda^2 = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 32.51 & 0 \\ 0 & 0 & 124.47 \end{pmatrix}.$$

- $A^{-1} = X\Lambda^{-1}X^T$ καθώς $(X\Lambda X^T)^{-1} = X\Lambda^{-1}X^T$.

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 19 & -1 & -28 \\ -1 & 1 & 1 \\ -28 & 1 & 46 \end{pmatrix} \text{ και } \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 7.07 & 0 & 0 \\ 0 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 \end{pmatrix}.$$

- Θέτουμε $A^{-2} = A^{-1}A^{-1}$. Τότε, $A^{-2} = X\Lambda^{-2}X^T$.

- Αν A είναι τριγωνικός τότε τα διαγώνια του στοιχεία είναι και οι ιδιοτιμές του.

Π.χ. Αν $\quad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

τότε $\quad \lambda_1 = 1, \quad ,\lambda_2 = 3, \quad ,\lambda_3 = -1.$

- Αν A είναι ορθογώνιος τότε οι ιδιοτιμές του είναι είτε 1 είτε -1.

- Αν B είναι μη-ιδιόμορφος, τότε BAB^{-1} και A έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Αντιστοιχία SVD του A και του Ιδιοσυστήματος A^TA

Θεωρήστε το SVD του $A \in \Re^{m\times n}$:

$$A = Q\Sigma P^T,$$

όπου Q και P έχουν ορθογώνιες στήλες, και

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Τώρα, $\quad A^TA = (P\Sigma Q^T)(Q\Sigma P^T) = P\Sigma^2 P^T$, ή

$$\boxed{P^T\,(A^TA)\,P = \Sigma^2.}$$

Έτσι, το SVD του A προβλέπει:

- Τα ιδιοδιανύσματα P του συμμετρικού $A^T A$

- Τα διαγώνια στοιχεία του Σ είναι οι θετικές τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του $A^T A$.

Π.χ. $\lambda_1 = \sigma_1^2, \ldots, \lambda_n = \sigma_n^2.$

Θέτουμε $$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ έτσι ώστε

$$A^T A = \begin{pmatrix} 38 & 33 & 23 \\ 33 & 105 & 18 \\ 23 & 18 & 14 \end{pmatrix}.$$

Η ιδιόμορφες τιμές του A είναι:
$\sigma_1 = 11.16, \quad \sigma_2 = 5.70$ και $\sigma_3 = 0.14.$

Οι ιδιοτιμές του $A^T A$ είναι:
$\lambda_1 = 124.47, \quad \lambda_2 = 32.51$ και $\lambda_3 = 0.02.$

Κατάσταση (Conditioning) $A^T A$

- Οι ιδιοτιμές του συμμετρικού $n \times n$ πίνακα, $A^T A$, δίνονται από $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (σε φθίνουσα σειρά).

- Η αναλογία

$$\kappa(A) = \sqrt{\lambda_1} / \sqrt{\lambda_n}$$

ονομάζεται αριθμός κατάστασης (condition number) του A.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 8 \\ 2 & 12 & -11 \\ -6 & -17 & 10 \\ 19 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\Lambda} = \begin{pmatrix} 31.71 & 0 & 0 \\ 0 & 19.80 & 0 \\ 0 & 0 & 16.99 \end{pmatrix}.$$

Ο αριθμός κατάστασης του A δίνεται από

$$\sqrt{\lambda_1}/\sqrt{\lambda_3} = 31.77/16.99 = 1.87.$$

Θεωρήστε τους πίνακες:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2.01 & 0 \\ 2 & 3.99 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2.1 & 0 \\ 2 & 3.9 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \\ 4 & 16 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cond(A_0)=8.82e+16,

$$\mathrm{Cond}(A_1) = 2124.5,$$

$$\mathrm{Cond}(A_2) = 213.02,$$

$$\mathrm{Cond}(A_3) = 17.77,$$

και $$\mathrm{Cond}(I_n) = n.$$

Τετραγωνική μορφή και ορισμός πινάκων

Θεωρήστε την τετραγωνική μορφή (quadratic form) $q = x^T A x$, όπου A είναι ένας συμμετρικός πίνακας και $x \neq 0$. Π.χ. αν $A \in \Re^{2\times 2}$, τότε

$$\boxed{q = x^T A x = \alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \alpha_{22} x_2^2.}$$

- Αν $x^T A x > 0$, τότε η τετραγωνική μορφή λέγεται θετικά ορισμένη (positive definite). *Σε αυτή την περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές.*

Π.χ. Θέτουμε $S = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ έτσι που $\Lambda = \begin{pmatrix} 10.70 & 0 \\ 0 & 4.29 \end{pmatrix}$.

- Αν $x^T A x \geq 0$, τότε η τετραγωνική μορφή είναι θετικά (ή μη-αρνητική) ημιορισμένη. *Σε αυτή την περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές ή μηδέν.*

  Π.χ. Θεωρούμε $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ έτσι που $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Αν $x^T A x < 0$, τότε η τετραγωνική μορφή θεωρείτε αρνητικά ορισμένη.

Σε αυτή την περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές του A είναι αρητικές.

- Αν $x^T A x \leq 0$, τότε η τετραγωνική μορφή θεωρείτε αρνητική (ή μη-θετική) ημιορισμένη.

  Σε αυτή την περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές του A είναι αρνητικές ή μηδέν.

Διανυσματική και Frobenius νόρμα

Η p-νόρμα του $x \in \Re^n$ ορίζεται ως:

$$\boxed{\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{όπου} \quad p \geq 1.}$$

Σημαντικές νόρμες:

- $\|x\|_1 = (|x_1| + \cdots + |x_n|)$.
- $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^T x}$.

Η 2-νόρμα είναι γνωστή ως Ευκλειδια νορμα. Απο δω και πέρα $\|\cdot\|$ θα υποδηλώνει την Ευκλείδια νόρμα.

- $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$.

Για τον πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in \Re^{m\times n}$ η Frobenius νορμα του A δίνεται από:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|^2}.$$

Απόλυτο και σχετικό σφάλαμα

Υποθέστε ότι $\hat{x} \in \Re^n$ προσεγγίζει το $x \in \Re^n$. Τότε:

- Απολυτο σφαλμα (Absolute error) του $\hat{x}$:

$$\|\hat{x} - x\|.$$

- Σχετικο σφαλμα (Relative error) του $\hat{x}$:

$$\|\hat{x} - x\| \Big/ \|x\|.$$

Γινόμενο Kronecker και διανυσματικός τελεστής

Υπολογισμοί που βοηθούν τη συρρίκνωση των συμβόλων, ιδίως όταν ασχολούμαστε με σύνολα παλυνδρομικών μοντέλων, είναι *το γινόμενο Kronecker (ή αλλιώς ευθύ γινόμενο)* και ο *διανυσματικός τελεστής (vector operator).*

Το γινόμενο Kronecker δύο πινάκων

$$A = [\alpha_{ij}] \in \Re^{m\times n} \qquad \text{και} \qquad B = [b_{ij}] \in \Re^{p\times q}$$

ορίζεται ωσ:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \alpha_{12}B & \dots & \alpha_{1n}B \\ \alpha_{21}B & \alpha_{22}B & \dots & \alpha_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}B & \alpha_{m2}B & \dots & \alpha_{mn}B \end{pmatrix}$$

Σημειώστε ότι $A \otimes B$ έχει διαστάσεις $mp \times nq$.

Παράδειγμα

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 5\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & 4\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{rr|rr} 3 & 12 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -0 & 0 \\ -6 & 3 & -0 & 0 \\ \hline 5 & 20 & 2 & 8 \\ -5 & 0 & -2 & 0 \\ -10 & 5 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

$$A \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

$$I_2 \otimes A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Διανυσματικός τελεστής (Vector operator)

Θώτουμε τον $m \times n$ πίνακα $Y = (y_1 \ldots y_n)$ όπου $y_i \in \Re^m$ είναι η i στήλη του Y. Ο τελεστής vec$(\cdot)$ παγωποιεί τις στήλες του Y την μια κάτω από την άλλη.

Έτσι,

$$\text{vec}(Y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Π.χ. Αν $Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $\text{vec}(Y) = (1 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 4 \ \ 0 \ \ 1)^T$.

Ιδιότητες

Εάν υποθέσουμε κατάλληλες διαστάσεις οι

ακόλουθες ιδιότητες ισχύουν:

- $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$.
- $(A \otimes B)^T = (A^T \otimes B^T)$.
- $(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1} \otimes B^{-1})$.
- $|A \otimes B| = |A|^M |B|^N$.
- $(A \otimes B)\text{vec}(C) = \text{vec}(BCA^T)$.

<u>Άθροισμα πινάκων</u>

Δίνεται το σύνολο των πινάκων $\{A_1, \ldots, A_G\}$. Το απευθείας άθροισμα πινάκων ορίζεται ως:

$$\bigoplus_{i=1}^{G} A_i = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_G) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_G \end{pmatrix}.$$

Σημειώστε ότι οι πίνακες $A_1, \ldots, A_G$ μπορούν να έχουν διαφορετικές διαστάσεις. Στην περίπτωση που οι πίνακες έχουν τις ίδιες διαστάσεις τότε:

$$\bigoplus_{i=1}^{G} A_i = I_G \otimes A.$$

Δίνεται το σύνολο των στηλών

$$\{y_i\}_G = \{y_1, \ldots, y_G\}$$

ο τελεστής vec$(\cdot)$ παγωποιεί τις στήλες την μία κάτω από την άλλη:

$$\mathrm{vec}(\{y_i\}_G) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_G \end{pmatrix}.$$

Τυχαίες στήλες και πίνακες

Μια *τυχαία στήλη* , ένας (*τυχαίος πίνακας*) είναι μια στήλη (ένας πίνακας) του οποίου τα στοιχεία είναι τυχαίες μεταβλητές. Η αναμενόμενη τιμή ενός τυχαίου πίνακα υπολογίζεται από τις αναμενόμενες τιμές κάθε του στοιχείου.

Έτσι, αν $X = [X_{ij}] \in \Re^{m\times n}$, τότε

$$\mathsf{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathsf{E}(X_{11}) & \ldots & \mathsf{E}(X_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathsf{E}(X_{m1}) & \ldots & \mathsf{E}(X_{mn}) \end{pmatrix},$$

όπου

$$E(X_{ij}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_{ij} f_{ij}(x_{ij}) dx_{ij} & \text{Αν } X_{ij} \text{ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με pdf } f_{ij}(x_{ij}) \\ \sum_{\text{όλα } x_{ij}} x_{ij} p_{ij}(x_{ij}) & \text{Αν } X_{ij} \text{ είναι διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας } p_{ij}(x_{ij}) \end{cases}$$

Παράδειγμα

Θεωρήστε την τυχαία στήλη $X^T = (X_1 \;\; X_2)$, όπου X_1 και X_2 έχουν, αντίστοιχα, τις ακόλουθες συναρτήσεις πιθανότητας:

x_1	-1	0	1
$p_1(x_1)$	0.3	0.3	0.4

x_2	0	1
$p_2(x_2)$	0.8	0.2

Έτσι, $\mathsf{E}(X) = (\mathsf{E}(X_1) \;\; \mathsf{E}(X_2))^T = (0.1 \;\; 0.2)^T$.

Μέσος διανυσμ. και πίνακες συνδιακυμάνσεων

Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $X = [X_i] \in \Re^n$, όπου X_i έχει μέσο $\mu_i = \mathrm{E}(X_i)$ και διακύμανση $\sigma_i^2 = \mathrm{E}(X_i - \mu_i)^2$, όπου $i = 1, \ldots, n$.

Ο μέσος του διανύσματος ((Mean vectors)) X δίνεται από:

$$\mathrm{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(X_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \mu.$$

Συγκεκριμένα,

$$\mu_i = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i) dx_i & \text{Αν } X_i \text{ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με pdf } f_i(x_i) \\ \sum_{\text{all } x_i} x_i p_i(x_i) & \text{Αν } X_{ij} \text{ είναι διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας } p_i(x_i) \end{cases}$$

και [a]

$$\sigma_i^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\mu_i)^2 f_i(x_i)dx_i & \text{Αν } X_i \text{ είναι συνεχής τυχαία μεταλητή με pdf } f_i(x_i) \\ \sum_{\text{all } x_i}(x_i-\mu_i)^2 p_i(x_i) & \text{Αν } X_i \text{ είναι διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας } p_i(x_i) \end{cases}$$

Η συμπεριφορά ενός ζεύγους τυχαίων μεταλητών, όπως οι X_i και X_k, εξηγείται με την συνάρτηση πιθανότητας αυτών των μεταβλητών και τη συνδιακύμανση σ_{ik}. Η συνδιακύμανση σ_{ik} είναι

[a] Συχνά σ_i^2 θα συμβολίζεται με σ_{ii}.

τρόπος μέτρησης της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών και δίνεται από:

$$\boxed{\sigma_{ik} = \mathsf{E}(X_i - \mu_i)(X_k - \mu_k).}$$

ΑνX_i καιX_k είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση από κοινού πιθανότητας (joint density function) $f_{ik}(x_i, x_k)$, τότε

$$\sigma_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k)f_{ik}(x_i, x_k)dx_i dx_k.$$

Αν X_i και X_k είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση μικτής πιθανότητας (joint probability function) $p_{ik}(x_i, x_k)$, τότε

$$\sigma_{ik} = \sum_{\text{all } x_i} \sum_{\text{all } x_k} (x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k) p_{ik}(x_i, x_k).$$

Γενικά, η συλλογική συμπεριφορά των n τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$, ή ισοδύναμα του τυχαίου διανύσματος $X^T = (X_1 \ldots X_n)$ χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση μικ'της πυκνότητας πιθανότητας (joint probability density function) $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x)$ του πίνακα συνδιακυμάνσεων τους. Οι συνδιακυμάνσεις των διανυσμάτων X δίνεται από:

$$\mathrm{Var}(X) = \Sigma = \mathrm{E}(X-\mu)(X-\mu)^T$$

$$= \mathrm{E}\begin{pmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \dots & (X_1-\mu_1)(X_n-\mu_n) \\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & (X_2-\mu_2)^2 & \dots & (X_2-\mu_2)(X_n-\mu_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n-\mu_n)(X_1-\mu_1) & (X_n-\mu_n)(X_2-\mu_2) & \dots & (X_n-\mu_n)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X_1-\mu_1)^2 & \mathrm{E}(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \dots & \mathrm{E}(X_1-\mu_1)(X_n-\mu_n) \\ \mathrm{E}(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & \mathrm{E}(X_2-\mu_2)^2 & \dots & \mathrm{E}(X_2-\mu_2)(X_n-\mu_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{E}(X_n-\mu_n)(X_1-\mu_1) & \mathrm{E}(X_n-\mu_n)(X_2-\mu_2) & \dots & \mathrm{E}(X_n-\mu_n)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα

Βρέστε τον πίνακα συνδιακυμάνσεων (covariance matrices) των δύο τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2 όταν η μικτή συνάρτηση πιθανότητας τους $p_{12}(x_1, x_2)$ αναπαρίσταται με τον ακόλουθο πίνακα:

$x_1 \backslash x_2$	0	1	$p_1(x_1)$
-1	0.24	0.06	0.3
0	0.16	0.14	0.3
1	0.40	0.00	0.4
$p_2(x_1)$	0.8	0.2	1

Σημειώστε ότι: $\mu_1 = \mathrm{E}(X_1) = 0.1$ και

$\mu_2 = \mathrm{E}(X_2) = 0.2$. Τώρα,

$$\sigma_{11} = \mathrm{E}(X_1 - \mu_1)^2 = \sum_{\text{all } x_1} (x_i - 0.1)^2 p_1(x_1)$$

$$= (-1 - .1)^2(.3) + (0 - .1)^2(.3) + (1 - .1)^2(.4) = 0.69$$

$$\sigma_{22} = \mathrm{E}(X_2 - \mu_2)^2 = \sum_{\text{all } x_2} (x_i - 0.2)^2 p_2(x_2)$$

$$= (0 - .2)^2(.8) + (1 - .2)^2(.2) = .16$$

$$\sigma_{12} = \mathrm{E}(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)$$

$$= \sum_{\text{all pairs } (x_1, x_2)} (x_1 - 0.1)(x_2 - 0.2) p_{12}(x_1, x_2)$$

$$= (-1 - .1)(0 - .2)(.24) + (-1 - .1)(1 - .2)(.06) + \cdots = -0.08$$

$$\sigma_{21} = \mathrm{E}(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) = \sigma_{12} = -0.08.$$

Έτσι, ο μέσος και ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του X δίνονται, αντίστοιχα, με:

$$\mu = \mathsf{E}(X) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathsf{Var}(X) = \Sigma = \begin{pmatrix} 0.69 & -0.08 \\ -0.08 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

Πολυμεταβλητή Κανονική

Οι n τυχαίες μεταβλητές $X^T = (X_1, \ldots, X_n)$ έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) που γράφονται ως :

$$p(X) = p(X_1, \ldots, X_n).$$

Αυτό δίνει την πιθανοφάνεια (likelihood) διαφόρων συνδιασμών τιμών της μεταβλητής X.

Η πιο συμαντική πολυμεταβλητή pdf είναι η κανονική πολυμεταβλητή (Multivariate Normal). Ορίζεται από το μέσο διάνυσμα μ και τον πίνακα διακυμάνσεων Σ. Ο τύπος της κανονικής πολυμεταβλητής δίνεται από:

$$\boxed{p(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\Big(-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)\Big).}$$

Σε συντομογραφία:

$$\boxed{X \sim N(\mu, \Sigma).}$$

Ιδιότητες

Θέτουμε X και Y να είναι τυχαίοι πίνακες ίδιων διαστάσεων και θέτουμε A και B πίνακες σταθερών τιμών. Τότε,

- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.
- $\mathrm{E}(AXB) = A\,\mathrm{E}(X)\,B$.
- $\mathrm{Var}(AX) = A\,\mathrm{Var}(X)\,A^T$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε $X \in \Re^n$ με θετικά ορισμένο πίνακα συνδιακυμάνσεων Σ. Επιπλέον, θέτουμε τον παράγοντα Cholesky του $\Sigma = CC^T$. Βρέστε τον πίνακα συνδιακυμάνσεων του $Z = C^{-1}X$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(C^{-1}X) = C^{-1}\,\mathrm{Var}(X)\,C^{-T}\\ &= C^{-1}\Sigma C^{-T} = C^{-1}CC^TC^{-T}\\ &= I_n.\end{aligned}$$

Παραδείγματα πράξεων πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και}$$

$$10\,A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 \\ 1 & 11 & 10 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A - B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 13 \\ 21 & 18 & 34 \\ 39 & 30 & 55 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 34 & 45 \\ 49 & 56 & 63 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B^T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 13 \\ 21 & 18 & 34 \\ 39 & 30 & 55 \end{pmatrix}^T = B^T A^T.$$

$\text{trace}(A) = 15, \quad \text{trace}(B) = 16,$
$\text{trace}(AB) = 76 = \text{trace}(BA),$

$$\mathrm{trace}(A+B) = 31 = \mathrm{trace}(A) + \mathrm{trace}(B),$$
$$\mathrm{trace}(10\,A) = 150 = 10\,\mathrm{trace}(A).$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.10 & -0.03 & -0.09 \\ 0.02 & 0.07 & -0.30 \\ 0.04 & 0.13 & 0.39 \end{pmatrix} \quad \text{και}$$
$$B^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = BB^{-1}.$$

$$(B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.02 & 0.04 \\ -0.03 & 0.07 & 0.13 \\ -0.09 & -0.30 & 0.39 \end{pmatrix} = (B^{-1})^T.$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.33 \end{pmatrix}$$

$D^{-1}D = DD^{-1} = I_3$ και $D^T = D$.

Παραγοντοποίηση Cholesky

Θεωρήστε το συμμετρικό πίνακα: $S = \begin{pmatrix} 90 & -18 & 6 \\ -18 & 40 & 22 \\ 6 & 22 & 21 \end{pmatrix}$.

Ο πίνακας $S = LL^T$, όπου $L = \begin{pmatrix} 9.49 & -1.90 & 0.63 \\ 0 & 6.03 & 3.85 \\ 0 & 0 & 2.41 \end{pmatrix}$.

Σημειώστε ότι ο αντίστροφος του κάτου τριγωνικού L είναι πάνω τριγωνικός:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 0.11 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.17 & 0 \\ -0.08 & -0.26 & 0.41 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα της QR

Θέτουμε $A = Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$, όπου $A \in \Re^{5\times 3}$, $Q \in \Re^{5\times 5}$ είναι ορθογώνιος και $R \in \Re^{3\times 3}$ πανώ τριγωνικός.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 8 \\ -9 & 7 & 3 \\ -13 & -14 & 17 \\ 4 & 3 & -13 \\ -4 & 1 & 16 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 18.6 & 7.69 & -23.00 \\ 0 & -14.14 & 5.60 \\ 0 & 0 & 15.04 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$Q = \begin{pmatrix} -0.43 & -0.09 & -0.09 & 0.55 & -0.70 \\ -0.48 & -0.76 & -0.26 & -0.28 & 0.20 \\ -0.70 & 0.61 & -0.17 & -0.05 & 0.33 \\ 0.22 & -0.10 & -0.50 & 0.68 & 0.48 \\ -0.22 & -0.19 & 0.80 & 0.38 & 0.35 \end{pmatrix}.$$

$$Q^T Q = Q Q^T = I_5, \quad Q^T A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Θέτουμε $Q = \begin{pmatrix} \widetilde{Q} & \widehat{Q} \end{pmatrix} =$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} -0.43 & -0.09 & -0.09 & 0.55 & -0.70 \\ -0.48 & -0.76 & -0.26 & -0.28 & 0.20 \\ -0.70 & 0.61 & -0.17 & -0.05 & 0.33 \\ 0.22 & -0.10 & -0.50 & 0.68 & 0.48 \\ -0.22 & -0.19 & 0.80 & 0.38 & 0.35 \end{array}\right).$$

$\widetilde{Q}R = A.$

Θέτουμε τον συμμετρικό πίνακα S που ορίζεται ως $S = B^T B$, όπου $B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Έτσι, $\quad S = \begin{pmatrix} 90 & -18 & 6 \\ -18 & 40 & 22 \\ 6 & 22 & 21 \end{pmatrix}$.

Ο συμμετρικός πίνακας $S = LL^T$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός:

$$L = \begin{pmatrix} 9.49 & 0 & 0 \\ -1.90 & 6.03 & 0 \\ 0.63 & 3.85 & 2.41 \end{pmatrix}.$$

Η παραγοντοποίηση QR του B δίνεται από $B = Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$, τότε

$$S = B^T B = \begin{pmatrix} R^T & 0 \end{pmatrix} Q^T Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \qquad = R^T R.$$

Έτσι, $L = R^T$, ή $L^T = R$, δηλαδή, ο παράγοντας Cholesky L^T του $S = B^T B$ είναι ο τριγωνικός παράγοντας της παραγοντοποίησηςQR του B.

Σημειώστε ότι η παραγοντοποίηση QR του $B = QR$

δίνεται από:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.95 & -0.30 & 0.10 \\ 0.32 & -0.90 & 0.31 \\ 0 & 0.33 & 0.94 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9.49 & -1.90 & 0.63 \\ 0 & 6.03 & 3.85 \\ 0 & 0 & 2.41 \end{pmatrix}.$$

Γενικευμένη παραγοντοποίηση QR

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 3 \\ -4 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -2 \\ 4 & -12 & 4 & -9 \\ 4 & 1 & 1 & -9 \\ -6 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Η γενικευμένη παραγοντοποίηση QR του A και B δίνεται από:

$$Q^T A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q^T BP = W,$$

όπου Q και P είναι ορθογώνιοι, και R και W είναι πάνω τριγωνικοί:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.84 & 0.32 & 0.41 & 0.14 \\ -0.11 & -0.68 & 0.07 & 0.73 \\ 0.42 & -0.02 & 0.90 & -0.05 \\ 0.32 & 0.66 & -0.09 & 0.67 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -9.49 & -4.96 \\ 0 & -3.67 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -0.66 & 0.59 & -0.24 & 0.40 \\ -0.28 & -0.75 & -0.49 & 0.35 \\ 0.59 & 0.13 & 0.03 & 0.80 \\ -0.37 & -0.27 & 0.84 & 0.29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4.82 & -2.43 & -0.74 & 7.46 \end{pmatrix}$$

Παραγοντοποίηση Ιδιάζουσας Τιμής

Ο πίνακας $A \in \Re^{m\times n}$ μπορεί να διασπαστεί ως $A = Q\Sigma P^T$, όπου Q και P είναι ορθογώνιοι, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ και $k = \mathrm{rank}(A)$.

Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 8 \\ 2 & 12 & -11 \\ -6 & -17 & 10 \\ 19 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 15 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} -0.49 & -0.05 & -0.11 & 0.51 & -0.70 \\ 0.49 & 0.29 & 0.02 & 0.80 & 0.22 \\ -0.63 & -0.15 & -0.23 & 0.26 & 0.68 \\ 0.23 & -0.93 & 0.20 & 0.19 & 0.01 \\ -0.27 & 0.15 & 0.94 & 0.06 & 0.09 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 31.71 & 0 & 0 \\ 0 & 19.80 & 0 \\ 0 & 0 & 16.99 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα συμμετρικών πινάκων

Θεωρήστε τον συμμετρικό πίνακα $A \in \Re^{m\times m}$ με ιδιο-διαμεριμό (eigen decomposition):

$$Q^T A Q = \Lambda.$$

Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 10.23 & -3.96 & 2.79 \\ -3.96 & 2.55 & -4.34 \\ 2.79 & -4.34 & 13.70 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.30 & -0.81 & 0.50 \\ 0.92 & 0.12 & -0.36 \\ 0.24 & 0.57 & 0.79 \end{pmatrix}$$

και

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 8.84 & 0 \\ 0 & 0 & 17.47 \end{pmatrix}.$$