

## Το πρόβλημα των Ιδιοτιμών

Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  με  $x \neq 0$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Το πρόβλημα ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ (THE EIGENVALUE PROBLEM) είναι η λύση στο:

$$Ax = \lambda x.$$

Σε μορφή πινάκων το πρόβλημα ιδιοτιμών μπορεί να γραφτεί ως:

$$(A - \lambda I_n)x = 0$$

Για να ισχύει  $x \neq 0$  υπονοείται ότι

$$|A - \lambda I_n| = 0.$$

## Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}; A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 12 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I_n| = (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 12 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4 - \lambda)(12 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} - (-3)(-3) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_n| &= ((4 - \lambda)(12 - \lambda) - 9) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= ((4 - \lambda)(12 - \lambda) - 9)((3 - \lambda)(6 - \lambda) - 4) \\ &= (\lambda^2 - 16\lambda + 57)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) \\ &= (\lambda - 13)(\lambda - 3)(\lambda - 7)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Ιδιοτιμές:  $\lambda_1 = 13$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 7$  και  $\lambda_4 = 2$ .

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα πρέπει να λύσουμε  $(A - \lambda I_4)x = 0$  για κάθε ιδιοτιμή.

Για  $\lambda_1 = 13$  έχουμε  $(A - 13I_4)x = 0$  ή

$$\begin{pmatrix} 4 - 13 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 12 - 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 - 13 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 - 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

το οποίο δίνει:

$$x_2 = -3x_1, \quad x_4 = 5x_3 \quad \text{και} \quad \frac{2}{7}x_3 = x_4.$$

Δηλαδή,  $x_3 = x_4 = 0$  και για κάποια τιμή  $x_1 = 1$  έπεται  $x_2 = -3$ .

Το πρώτο ιδιοδιάνυσμα δίνεται από:  $x_*^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιώντας το  $x_*^{(1)}$ , δηλαδή, διαιρώντας κάθε στοιχείο με  $\|x_*^{(1)}\| = \sqrt{x_*^{(1)T} x_*^{(1)}} = \sqrt{10}$ , μας δίνει το ιδιοδιάνυσμα:

$$x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Για  $\lambda_2 = 3$  έχουμε  $(A - 3I_4)x = 0$  η'

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

το οποίο δίνει:

$$x_1 = 3x_2, \quad x_4 = 0 \quad \text{και} \quad x_3 = -\frac{3}{2}x_4 = 0.$$

Για κάποια τιμή  $x_2 = 1$  έπεται  $x_1 = 3$ .

Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα δίνεται από:  $x_*^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιώντας το  $x_*^{(2)}$ , δηλαδή, διαιρώντας κάθε στοιχείο με  $\|x_*^{(2)}\| = \sqrt{10}$ , μας δίνει το ιδιοδιάνυσμα:

$$x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Για  $\lambda_3 = 7$  έχουμε  $(A - 7I_4)x = 0$  ή

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

το οποίο δίνει:  $x_1 = -x_2$ ,  $x_1 = \frac{5}{3}x_2$ ,  $x_4 = 2x_3$ .  
Δηλαδή,  $x_1 = x_2 = 0$  και για κάποια τιμή  $x_3 = 1$   
έπεται  $x_4 = 2$ .

Το τρίτο ιδιοδιάνυσμα δίνεται από:  $x_*^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιώντας το  $x_*^{(3)}$ , δηλαδή, διαιρώντας κάθε  
στοιχείο με  $\|x_*^{(3)}\| = \sqrt{5}$ , μας δίνει το ιδιοδιάνυσμα:

$$x^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Για  $\lambda_4 = 2$  έχουμε  $(A - 2I_4)x = 0$  ή

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

το οποίο δίνει:  $2x_1 = 3x_2$ ,  $3x_1 = 10x_2$ ,  $x_3 = -2x_4$ .

Δηλαδή,  $x_1 = x_2 = 0$  και για κάποια τιμή  $x_4 = 1$  έπεται  $x_3 = -2$ .

Το τέταρτο ιδιοδιάνυσμα δίνεται από:  $x_*^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιώντας το  $x_*^{(4)}$ , δηλαδή, διαιρώντας κάθε στοιχείο με  $\|x_*^{(4)}\| = \sqrt{5}$ , μας δίνει το ιδιοδιάνυσμα:

$$x^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Η φασματική ανάλυση (Spectral Decomposition) του  $A$  δίνεται από

$$A = X\Lambda X^T$$

όπου

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

και

$$X = (x^{(1)} \ x^{(2)} \ x^{(3)} \ x^{(4)}) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Η φασματική ανάλυση του  $A^2$  δίνεται από  $A^2 = X\Lambda^2 X^T$ :

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} 13^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad X = (x^{(1)} \ x^{(2)} \ x^{(3)} \ x^{(4)}).$$

Η φασματική ανάλ. του  $A^{-1}$  δίνεται από  $A^{-1} = X\Lambda^{-1} X^T$ :

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad X = (x^{(1)} \ x^{(2)} \ x^{(3)} \ x^{(4)}).$$