ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΔΕΔ 241

ΓΙΩΡΓΟΣ ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5:

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Let us introduce the problem we will use to demonstrate the simplex method. HighTech Industries imports electronic components that are used to assemble two different models of personal computers. One is called the HT Deskpro Computer, and the other model is called the HT Portable Computer. HighTech's management is currently interested in developing a weekly production schedule for both products.

The Deskpro generates a profit contribution of $50 per unit, and the Portable generates a profit contribution of $40 per unit. For next week's production, a maximum of 150 hours of assembly time can be made available. Each unit of the Deskpro requires 3 hours of assembly time, and each unit of the Portable requires 5 hours of assembly time. In addition, HighTech currently has only 20 Portable display components in inventory; thus no more than 20 units of the Portable may be assembled. Finally, only 300 square feet of warehouse space can be made available for new production. Assembly of each Deskpro requires 8 square feet of warehouse space; similarly, each Portable requires 5 square feet.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

To develop a linear programming model for the HighTech problem. we will use the following decision variables:

x_1 = number of units of the Deskpro assembled

x_2 = number of units of the Portable assembled

The complete mathematical model for this problem is presented below.

$$\text{Max} \quad 50x_1 + 40x_2$$

s.t.

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 150 & \text{Assembly time} \\ & & 1x_2 & \leq & 20 & \text{Portable display} \\ 8x_1 & + & 5x_2 & \leq & 300 & \text{Warehouse capacity} \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Adding a *slack variable* to each of the constraints permits us to write the problem in standard form.

$$\text{Max} \quad 50x_1 + 40x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \tag{5.1}$$

s.t.

$$3x_1 + 5x_2 + 1s_1 = 150 \tag{5.2}$$

$$1x_2 + 1s_2 = 20 \tag{5.3}$$

$$8x_1 + 5x_2 + 1s_3 = 300 \tag{5.4}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \tag{5.5}$$

Οι περιορισμοί (5.2)–(5.4) αποτελούν σύστημα 3 γραμμικών εξισώσεων με 5 μεταβλητές.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- Η μέθοδος simplex είναι μια αλγεβρική διαδικασία λύσης γραμμικών προγραμμάτων. Εφόσον (συνήθως) ο αριθμός των περιορισμών είναι μικρότερος του αριθμού των μεταβλητών, η μέθοδος simplex αναθέτει σε ορισμένες από τις μεταβλητές τιμή ίση με μηδέν και μετά επιλύει το σύστημα των εξισώσεων για να βρεί τις τιμές των υπολοίπων μεταβλητών.
  - » The simplex method is an algebraic procedure for solving linear programs. Since the constraint equations usually have more variables than equations, the simplex method finds solutions for these equations by assigning zero values to some of the variables and then solving for the values of the remaining variables.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Εαν x_2=0 και s_1=0 τότε

$$\begin{array}{lllllll} 3x_1 & & & & & = & 150 \\ & & 1s_2 & & & = & 20 \\ 8x_1 & & & + & 1s_3 & = & 300 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 150/3 = 50$

$\Rightarrow \quad s_2 = 20$

$\Rightarrow \quad 8(50) + s_3 = 300 \Rightarrow \quad s_3 = -100$

Η λύση $x_1 = 50$, $x_2 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 20$, $s_3 = -100$ είναι μια ***βασική λύση (basic solution).***

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- Για να προσδιορίσουμε μια ***βασική λύση*** για ένα ΓΠ στην τυπική του μορφή το οποίο έχει **n** μεταβλητές (συμπεριλαμβανομένων των μεταβλητών αποφάσεως, τις μεταβλητές χαλαρότητας και τις μεταβλητές πλεονάσματος) θέτουμε την τιμή **n-m** μεταβλητών σε μηδέν και επιλύουμε το σύστημα των **m** γραμμικών περιορισμών για να βρούμε την τιμή των υπολοίπων μεταβλητών.
    - » For a linear program written in its standard form with n variables (including decision variables, slack variables and surplus variables) to determine a basic solution, set n-m variables equal to zero and solve the m linear constraint equations for the remaining m variables.

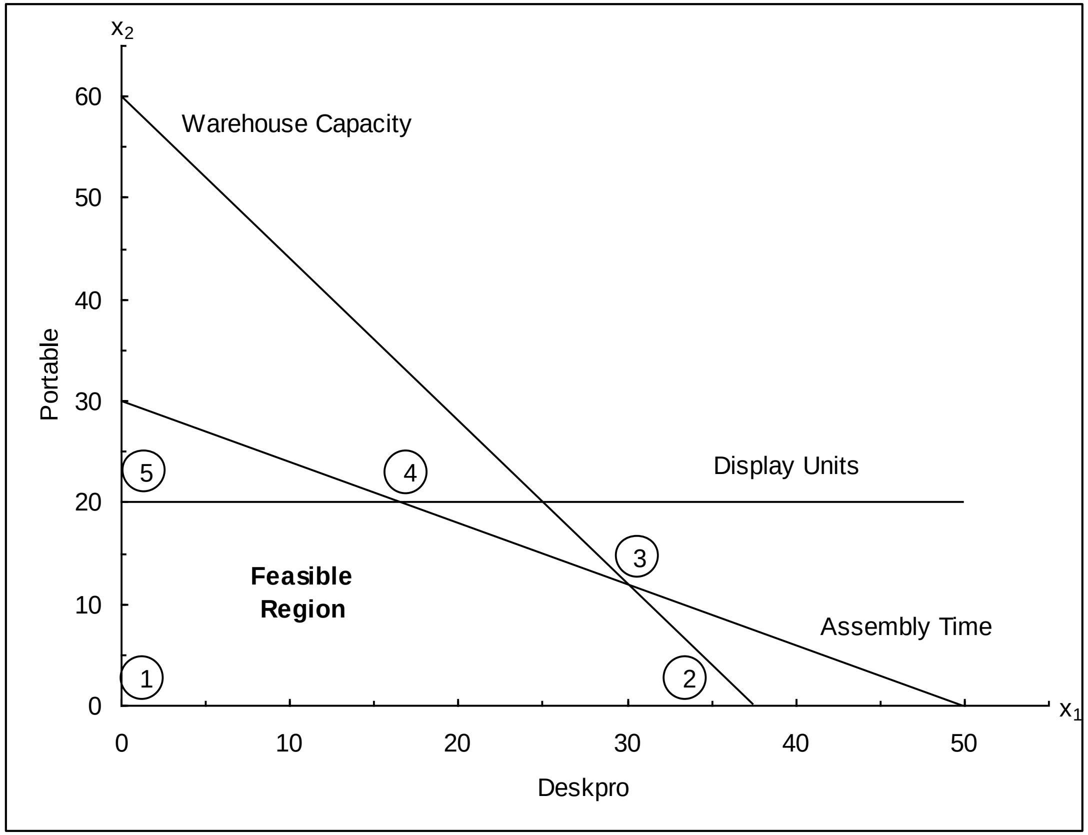
Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- *Μια **βασική λύση** θεωρείται ότι είναι **βασική <u>εφικτή</u> λύση** εάν ικανοποιεί τις συνθήκες μη αρνητικότητας.*
  - A basic solution is a basic feasible solution if it satisfies the nonnegativity conditions.

Π.χ. εαν x_1=0 και x_2=0 τότε

$$
\begin{aligned}
1s_1 \qquad\qquad &= 150 \\
1s_2 \qquad &= 20 \\
1s_3 &= 300
\end{aligned}
$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

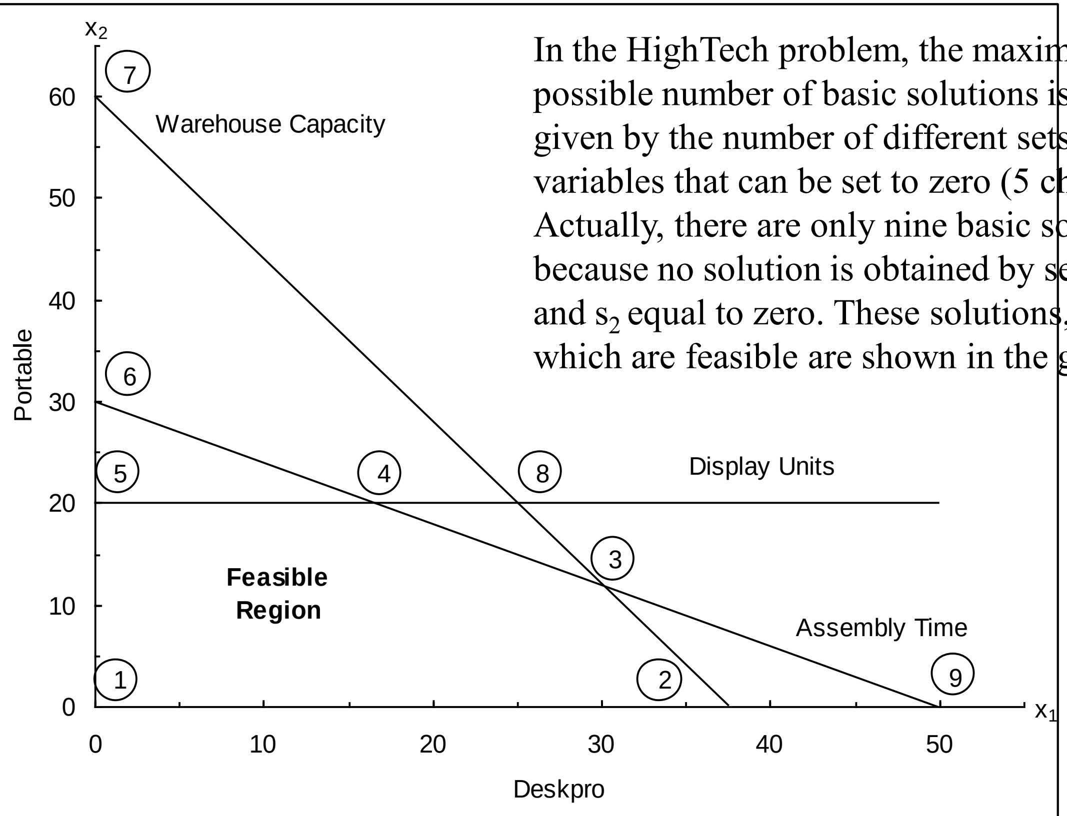


Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- Όλες οι εφικτές βασικές λύσεις αντιπροσωπεύουν ακραία σημεία της εφικτής περιοχής.
  - » All basic feasible solutions correspond to extreme points of the feasible region.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

In the HighTech problem, the maximum possible number of basic solutions is 10, given by the number of different sets of two variables that can be set to zero (5 choose 2). Actually, there are only nine basic solutions because no solution is obtained by setting x_2 and s_2 equal to zero. These solutions, five of which are feasible are shown in the graph.



Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- Η μέθοδος simplex είναι μια διαδικασία επανάληψης για μετακίνηση από μια βασική εφικτή λύση (ακραίο σημείο) σε κάποια άλλη μέχρι να εξευρεθεί η βέλτιστη λύση.
  - » The simplex method is an iterative procedure for moving from one basic feasible solution (extreme point) to another until the optimal solution is found.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Πίνακας Simplex (Simplex Table)

c_j = objective function coefficient for variable j
b_i = right-hand-side value for constraint i
a_{ij} = coefficient associated with variable j in constraint i .

C_1	C_2	$\ldots C_n$	
a_{11}	a_{12}	$\ldots a_{1n}$	b_1
a_{21}	a_{22}	$\ldots a_{2n}$	b_2
.	.	….	.
.	.	….	.
a_{m1}	a_{m2}	$\ldots a_{mn}$	b_m

50	**40**	**0**	**0**	**0**	
3	5	1	0	0	150
0	1	0	1	0	20
8	5	0	0	1	300

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

c row = row of objective function coefficients

b column = column of right-hand-side values of the constraint equations

A matrix = *m* rows and *n* columns of coefficients of the variables in the constraint equations

c row	
A matrix	B column

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
50	40	0	0	0	
3	5	1	0	0	**150**
0	1	0	1	0	**20**
8	5	0	0	1	**300**

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	50	40	0	0	0		
	3	5	1	0	0	**150**	
Row associated with s_2 →	0	1	0	1	0	**20**	←Value of s_2
	8	5	0	0	1	**300**	
				↑			

Column associated with s_2

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	3	5	1	0	0	**150**
s_2	0	0	1	0	1	0	**20**
s_3	0	8	5	0	0	1	**300**

Η ***Βάση (Basis)*** περιέχει τις υφιστάμενες ***βασικές μεταβλητές (basic variables).***

Η στήλη C_B περιέχει τους συντελεστές των βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{μη βασικές μεταβλητές}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = b_1 = 150 \\ s_2 = b_2 = 20 \\ s_3 = b_3 = 300 \end{array}\right\} \text{βασικές μεταβλητές}$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	3	5	1	0	0	**150**
s_2	0	0	1	0	1	0	**20**
s_3	0	8	5	0	0	1	**300**
z_j							**0**
$c_j - z_j$							

Profit

Η σειρά (row) z_j αντιπροσωπεύει τη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης που θα προκύψει εάν μια μονάδα της μεταβλητής της στήλης (column) j του πίνακα A εισέλθει στη βάση. Δηλαδή η μεταβλητή γίνεται βασική με τιμή 1.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	3	5	1	0	0	**150**
s_2	0	0	1	0	1	0	**20**
s_3	0	8	5	0	0	1	**300**
z_j							**0**
$c_j - z_j$							

Profit

Η σειρά $c_j - z_j$ αντιπροσωπεύει την αλλαγή της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης εάν μια μονάδα της μεταβλητής της j στήλης του πίνακα A εισέλθει στη λύση. Η σειρά $c_j - z_j$ ονομάζεται ***σειρά καθαρής αξιολόγησης (net evaluation row).***

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Εάν $x_1 = 0$ γίνει $x_1 = 1$ και το x_2 παραμείνει μη βασική μεταβλητή, $x_2 = 0$, τότε από τον περιορισμό

$$3 x_1 + 5 x_2 + 1 s_1 = 150$$

προκύπτει ότι το s_1 θα μειωθεί κατά 3 μονάδες.

Από τον περιορισμό

$$1 x_2 + 1 s_2 = 20$$

προκύπτει ότι το s_2 δεν θα μειωθεί.

Από τον περιορισμό

$$8 x_1 + 5 x_2 + 1 s_3 = 300$$

προκύπτει ότι το s_3 θα μειωθεί κατά 8 μονάδες.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Συμπέρασμα: Οι συντελεστές της στήλης που σχετίζονται με μη βασική μεταβλητή αντιπροσωπεύουν τη μείωση των βασικών μεταβλητών όταν η μη βασική μεταβλητή γίνει βασική με τιμή μιας μονάδας.

$$Z_1 = 0(3) + 0(0) + 0(8) = 0$$

$$Z_2 = 0(5) + 0(1) + 0(5) = 0$$

$$Z_3 = 0(1) + 0(0) + 0(0) = 0$$

$$Z_4 = 0(0) + 0(1) + 0(0) = 0$$

$$Z_5 = 0(0) + 0(0) + 0(1) = 0$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	3	5	1	0	0	**150**
s_2	0	0	1	0	1	0	**20**
s_3	0	8	5	0	0	1	**300**
z_j		0	0	0	0	0	**0**
$c_j - z_j$		50	40	0	0	0	

Profit

Profit = 150(0) + 20(0) +300(0) = 0

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Basis	C_B	50	40	0	0	0		$\underline{b_I} / a_{i1}$
s_1	0	3	5	1	0	0	**150**	$^{150}/_3 = 50$
s_2	0	0	1	0	1	0	**20**	**-**
s_3	0	8	5	0	0	1	**300**	$^{300}/_8 = 37.5$
z_j		0	0	0	0	0	**0**	
$c_j - z_j$		50	40	0	0	0		

Η μέγιστη τιμή του x_1 από την $1_η$ σειρά

$3x_1 = 150 \Rightarrow x_1 = 50$

$\Rightarrow 3x_1 + 5x_2 + 1s_1 = 150$ δίνει $s_1 = Ø$

Η μέγιστη τιμή του x_1 από την $3_η$ σειρά

$8x_1 = 300 \Rightarrow x_1 = 37.5$

$\Rightarrow 8x_1 + 5x_2 + s_3 = 300$ δίνει $s_3 = Ø$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

CRITERION FOR ENTERING A NEW VARIABLE INTO THE BASIS

Look at the net evaluation row ($c_j – z_j$) and select the variable to enter the basis that will cause the largest per-unit improvement in the value of the objective function. In the case of a tie, we follow the convention of selecting the variable to enter the basis that corresponds to the leftmost of the columns.

CRITERION FRO REMOVING A VARIABLE FROM THE CURRENT BASIS (MINIMUM RATIO TEST)

Suppose the incoming basis variable corresponds to column j in the A portion of the simplex tableau. For each row I, compute the ratio b_1/a_{1j} for each a_{1j} greater than zero. The basic variable that will be removed from the basis corresponds to the minimum of these ratios. In the case of a tie, we follow the convention of selecting the variable that corresponds to the uppermost of the tied rows.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Basis	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		$\underline{b_I}$ / a_{i1}
		50	40	0	0	0		
s_1	0	3	5	1	0	0	**150**	$^{150}/_{3}$ = 50
s_2	0	0	1	0	1	0	**20**	-
s_3	0	8	5	0	0	1	**300**	$^{300}/_{8}$ = 37.5
z_j		0	0	0	0	0	**0**	
$c_j - z_j$		50	40	0	0	0		

Αξονική σειρά ή σειρά οδηγός (***Pivot Row***)

Αξονικό στοιχείο ή στοιχείο οδηγός (***Pivot Element***)

Αξονική στήλη ή στήλη οδηγός (***Pivot Column***)

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Το επόμενο στάδιο προβλέπει την αλλαγή της στήλης της μη βασικής μεταβλητής που θα εισέλθει στη βάση σε μοναδιαίο διάστημα (unit column or unit vector).

Η στήλη $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ θα πρέπει να μετατραπεί σε $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Αυτό επιτυγχάνεται με στοιχειώδεις πράξεις στις σειρές (elementary row operations).

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$$3x_1 + 5\,x_2 + 1s_1 + ø\,s_2 + ø\,s_3 = 150 \qquad (1)$$

$$øx_1 + 1\,x_2 + øs_1 + 1\,s_2 + ø\,s_3 = 20 \qquad (2)$$

$$8x_1 + 5\,x_2 + øs_1 + ø\,s_2 + 1\,s_3 = 300 \qquad (3)$$

$$(1/8)\,[8x_1 + 5\,x_2 + øs_1 + ø\,s_2 + 1\,s_3] = (1/8)\,(300)$$

ή

$$1x_1 + (5/8)\,x_2 + øs_1 + ø\,s_2 + (1/8)\,s_3 = 75/2 \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4) με 3 :

$$3x_1 + (15/8)\,x_2 + øs_1 + ø\,s_2 + (3/8)\,s_3 = 225/2 \qquad (5)$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

(1)– (5) δίνει

$$(3x_1 + 5\ x_2 + 1s_1) - (3x_1 + (15/8)\ x_2 + (3/8)\ s_2) = 150 - 225/2$$

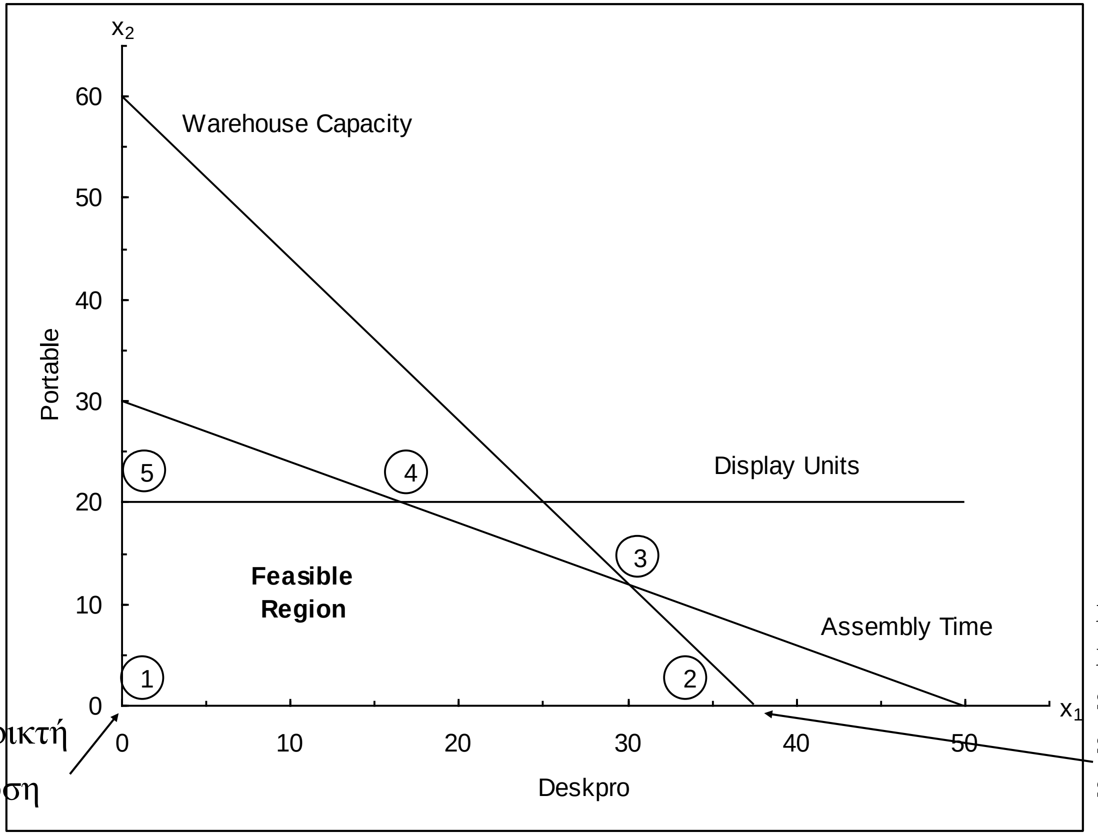
$$\text{ή } \varnothing x_1 + (25/8)\ x_2 + 1s_1 - (3/8)\ s_2 = 75/2$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	**C_B**	50	40	0	0	0	
s_1	0	0	$^{25}/_{8}$	1	0	$-^{3}/_{8}$	$^{75}/_{2}$
s_2	0	0	1	0	1	0	**20**
x_1	50	1	$^{5}/_{8}$	0	0	$^{1}/_{8}$	$^{75}/_{2}$
z_j							**1875**
$c_j - z_j$							

Profit = ø (75/2) + ø (20) + 50(75/2) = 1875

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD



$x_1=0$
$x_2=0$
$s_1=150$
$s_2=20$
$s_3=300$

Αρχική εφικτή βασική λύση

$x_1={}^{75}/_2$
$x_2=0$
$s_1={}^{75}/_2$
$s_2=20$
$s_3=0$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$Z_1 = 0(0) + 0(0) + 50(1) = 50$

$Z_2 = 0(^{25}/_8) + 0(1) + 50(^5/_8) = {}^{250}/_8$

$Z_3 = 0(1) + 0(0) + 50(0) = 0$

$Z_4 = 0(0) + 0(1) + 50(0) = 0$

$Z_5 = 0(^{-3}/_8) + 0(0) + 50(^1/_8) = {}^{50}/_8$

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	0	$^{25}/_8$	1	0	$-^3/_8$	$^{75}/_2$
s_2	0	0	1	0	1	0	**20**
x_1	50	1	$^5/_8$	0	0	$^1/_8$	$^{75}/_2$
z_j		50	$^{250}/_8$	0	0	$^{50}/_8$	**1875**
$c_j - z_j$		0	$^{70}/_8$	0	0	$-^{50}/_8$	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Basis	C_B	50	40	0	0	0		$\underline{b_I} / a_{i2}$
s_1	0	0	$\boxed{^{25}/_8}$	1	0	$-^3/_8$	$\mathbf{^{75}/_2}$	$(^{75}/_2)/(^{25}/_8) = 12$
s_2	0	0	1	0	1	0	**20**	$^{20}/_1 = 20$
x_1	50	1	$^5/_8$	0	0	$^1/_8$	$\mathbf{^{75}/_2}$	$(^{75}/_2)/(^5/_8) = 60$
z_j		50	$^{250}/_8$	0	0	$^{50}/_8$	**1875**	
$c_j - z_j$		0	$^{70}/_8$	0	0	$-^{50}/_8$		

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

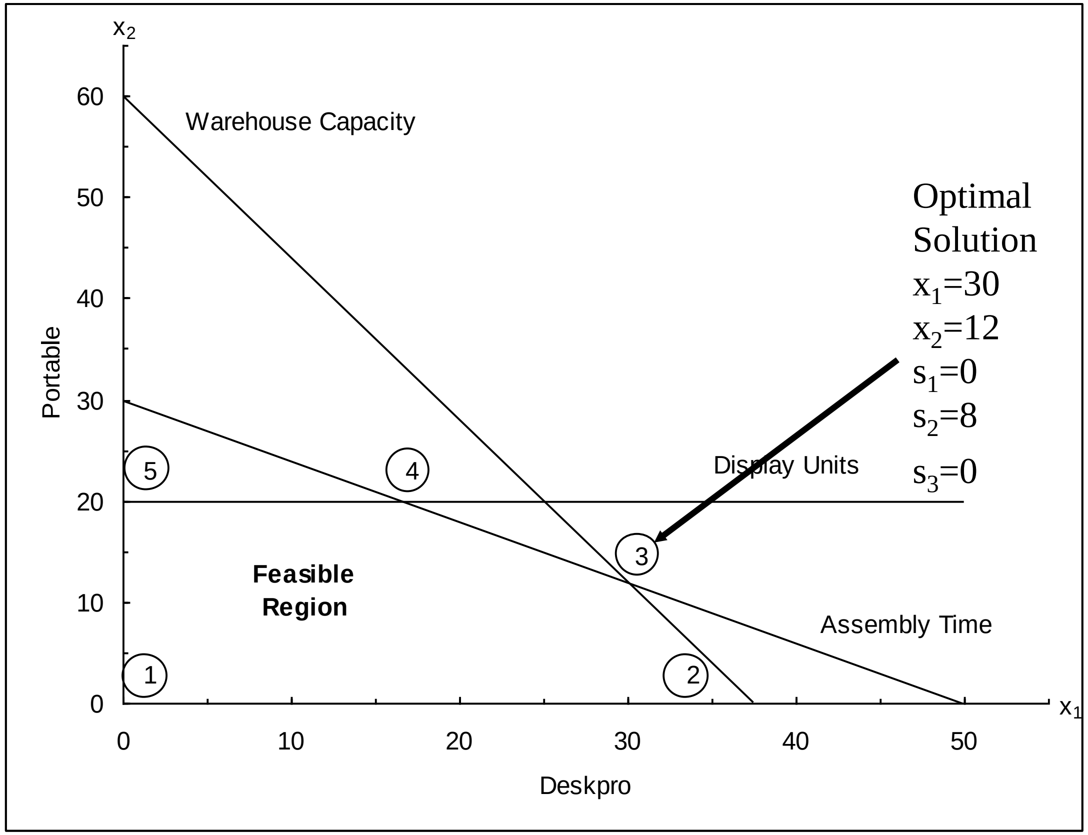
Basis	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
		50	40	0	0	0	
x_2	40	0	1	$^{8}/_{25}$	0	$-^{3}/_{25}$	**12**
s_2	0	0	0	$-^{8}/_{25}$	1	$^{3}/_{25}$	**8**
$x1$	50	1	0	$-^{5}/_{25}$	0	$^{5}/_{25}$	**30**
z_j		50	40	$^{14}/_{5}$	0	$^{26}/_{5}$	**1980**
$c_j - z_j$		0	0	$-^{14}/_{5}$	0	$-^{26}/_{5}$	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

<u>OPTIMALITY CRITERION</u>

The optimal solution to a linear program (maximization) has been reached when **all** of the entries in the net evaluation row (c_j - z_j) are *zero or negative*. In such cases, the optimal solution is the current basic feasible solution.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD



Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Solve the following linear program using the simplex method:

$$\text{Max } 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 1x_4$$

s. t.

$$(3/2)x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 550$$

$$4x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 \leq 700$$

$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 \leq 200$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

First, we add slack variables to convert the problem to ***standard form***:

$$\text{Max } 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

s. t.

$$\tfrac{3}{2}x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 1s_1 = 550$$

$$4x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 1s_2 = 700$$

$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 1s_3 = 200$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3		
Basis	C_B	4	6	3	1	0	0	0		$\underline{b_I} / a_{i2}$
s_1	0	$^3/_2$	2	4	3	1	0	0	**550**	$^{550}/_2$ = 275
s_2	0	4	1	2	1	0	1	0	**700**	$^{700}/_1$ = 700
s_3	0	2	3	1	2	0	0	1	**200**	$^{200}/_3$ = $66\ ^2/_3$
z_j		0	0	0	0	0	0	0	**0**	
$c_j - z_j$		4	6	3	1	0	0	0		

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Result of Iteration 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3		
Basis	C_B	4	6	3	1	0	0	0		b_I / a_{i3}
s_1	0	$^1/_6$	0	$^{10}/_3$	$^5/_3$	1	0	$-^2/_3$	**416 $^2/_3$**	125
s_2	0	$^{10}/_3$	0	$^5/_3$	$^1/_3$	0	1	$-^1/_3$	**633 $^1/_3$**	380
X_2	6	$^2/_3$	1	$^1/_3$	$^2/_3$	0	0	$^1/_3$	**66 $^2/_3$**	200
z_j		4	6	2	4	0	0	2	**400**	
$c_j - z_j$		0	0	1	-3	0	0	-2		

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Result of Iteraton 2:

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	4	6	3	1	0	0	0	
X3	3	$^{3}/_{60}$	0	1	$^{15}/_{30}$	$^{3}/_{10}$	0	$-^{6}/_{30}$	**125**
s_2	0	$^{195}/_{60}$	0	0	$-^{15}/_{30}$	$-^{5}/_{10}$	1	0	**425**
X_2	6	$^{39}/_{60}$	1	0	$^{15}/_{30}$	$-^{1}/_{10}$	0	$^{12}/_{30}$	**25**
z_j		$^{81}/_{60}$	6	3	$^{9}/_{2}$	$^{3}/_{10}$	0	$^{54}/_{30}$	**525**
$c_j - z_j$		$-^{1}/_{20}$	0	0	$-^{7}/_{2}$	$-^{3}/_{10}$	0	$-^{54}/_{30}$	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$$
\begin{array}{llllllllllllllll}
\max & 40 & x_1 & + & 30 & x_2 & + & 0 & s_1 & + & 0 & s_2 & + & 0 & s_3 & & \\
\text{s. t.} & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& {}^2/_5 & x_1 & + & {}^1/_2 & x_2 & + & 1 & s_1 & & & & & & & = & 20 \\
& & & & {}^1/_5 & x_2 & & & & + & 1 & s_2 & & & & = & 5 \\
& {}^3/_5 & x_1 & + & {}^3/_{10} & x_2 & & & & & & & + & 1 & s_3 & = & 21
\end{array}
$$

$$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , s_3 \geq 0$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

The complete initial simplex tableau

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	40	30	0	0	0	
s_1	0	$^2/_5$	$^1/_2$	1	0	0	**20**
s_2	0	0	$^1/_5$	0	1	0	**5**
s_3	0	$^3/_5$	$^3/_{10}$	0	0	1	**21**
z_j		0	0	0	0	0	**0**
$c_j - z_j$		40	30	0	0	0	

Profit

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Improving the Solution

- Criterion for entering a new variable into the basis
- Criterion for removing a variable from the current basis

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Basis	C_B	40	30	0	0	0		$\underline{b_I}$ / a_{i1}
s_1	0	$^2/_5$	$^1/_2$	1	0	0	**20**	$20/(^2/_5) =$ 50
s_2	0	0	$^1/_5$	0	1	0	**5**	
s_3	0	$^3/_5$	$^3/_{10}$	0	0	1	**21**	$21/(^3/_5) =$ 35
z_j		0	0	0	0	0	**0**	
$c_j - z_j$		40	30	0	0	0		

Pivot Element **Profit**

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Conclusion

- x_1 will enter the basis
- s_3 will be removed from the current basis

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Moving towards a better solution: First Iteration

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Basis	C_B	40	30	0	0	0		b_I / a_{i1}
s_1	0	0	$^3/_{10}$	1	0	$-^2/_3$	**6**	$6/(^3/_{10}) = 20$
s_2	0	0	$^1/_5$	0	1	0	**5**	$5/(^1/_5) = 25$
x_1	4 0	1	$^1/_2$	0	0	$^5/_3$	**35**	$35/(^1/_2) = 70$
z_j		40	20	0	0	$^{200}/_3$	**1400**	
$c_j - z_j$		0	10	0	0	$-^{200}/_3$		

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Second Iteration: x_2 enters the basis

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	**C_B**	40	30	0	0	0	
x_2	30	0	1	$^{10}/_{3}$	0	$-^{20}/_{9}$	**20**
S_2	0	0	0	$-^{2}/_{3}$	1	$^{4}/_{9}$	**1**
x_1	4 0	1	0	$-^{5}/_{3}$	0	$^{25}/_{9}$	**25**
z_j		40	30	$^{100}/_{3}$	0	$^{400}/_{9}$	**1400**
$c_j - z_j$		0	0	$-^{100}/_{3}$	0	$-^{400}/_{9}$	

Stopping Criterion

The optimal solution to a linear programming problem has been reached when there are no positive values in the net evaluation row of the simplex tableau.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Suppose that in the High Tech Industries problem, management wanted to ensure that the combined total production for both models would be at least 25 units. This requirement means that the following constraint must be added to the current linear program:

$$1\ x_1 + 1\ x_2 \geq 25$$

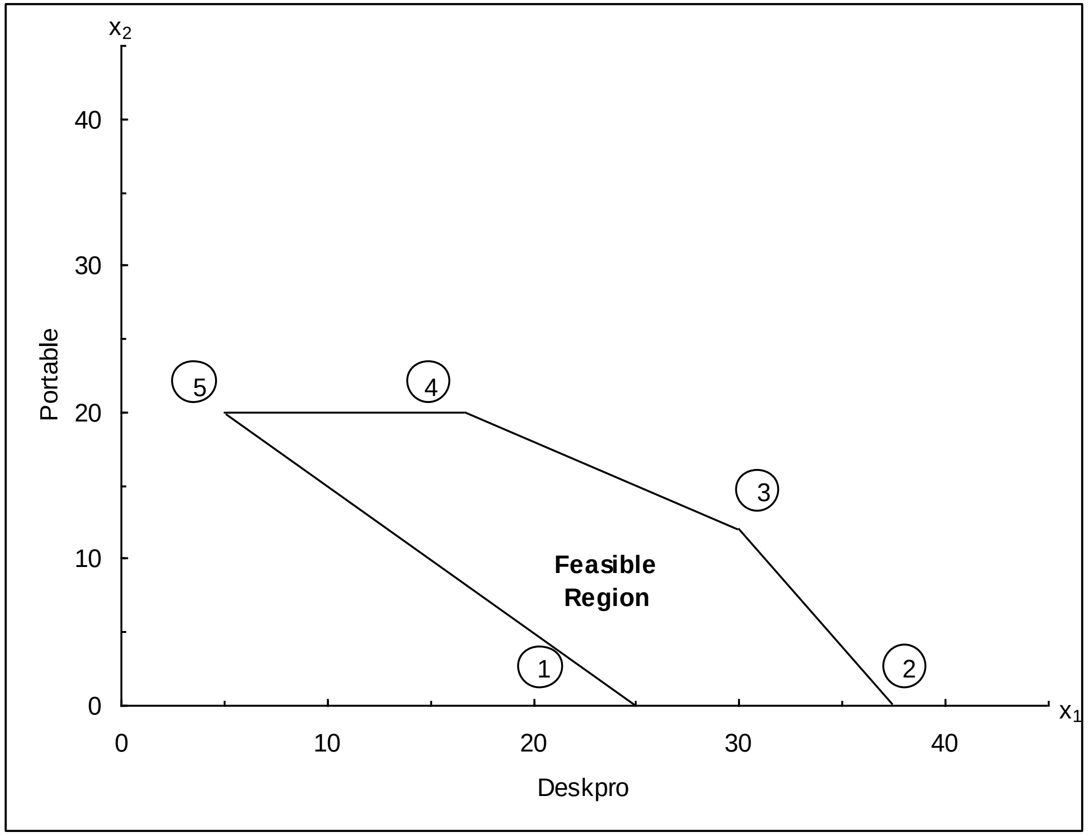
Adding this constraint results in the following modified problem:

Max $50\,x_1 + 40\,x_2$

s. t.

$3\ x_1 + 5\ x_2 \leq 150$	Assembly time
$1\ x_2 \leq 20$	Portable display
$8\ x_1 + 5\ x_2 \leq 300$	Water house space
$1\ x_1 + 1\ x_2 \geq 25$	Minimum total production
$x_1, x_2 \geq 0$	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD



Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$$\text{Max } 50x_1 + 40x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

s. t.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
3x_1 & + 5x_2 & + 1s_1 & & & = 150 & (5.12) \\
 & 1x_2 & & + 1s_2 & & = 20 & (5.13) \\
8x_1 & + 5x_2 & & & + 1s_3 & = 300 & (5.14) \\
1x_1 & + 1x_2 & & & - 1s_4 & = 25 & (5.15)
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$s_1 = 150$

$s_2 = 20$

$s_3 = 300$

$s_4 = -25$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
3x_1 & + & 5x_2 & + & 1s_1 & & & & & & & & & = & 150 \\
 & & 1x_2 & & & + & 1s_2 & & & & & & & = & 20 \\
8x_1 & + & 5x_2 & & & & & + & 1s_3 & & & & & = & 300 \\
1x_1 & + & 1x_2 & & & & & & & - & 1s_4 & + & 1\alpha_4 & = & 25
\end{array}
$$

Τεχνητή μεταβλητή (artificial variable)

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$s_1 = 150$

$s_2 = 20$

$s_3 = 300$

$s_4 = 0$

$a_4 = 25$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$$\text{Max } 50x_1 + 40x_2 + 0\ s_1 + 0\ s_2 + 0\ s_3 + 0\ s_4 - M\alpha_4$$

The initial simplex tableau for the problem is shown below:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_4	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	0	-M	
s_1	0	3	5	1	0	0	0	0	**150**
s_2	0	0	1	0	1	0	0	0	**20**
s_3	0	8	5	0	0	1	0	0	**300**
α_4	-M	1	1	0	0	0	-1	1	**25**
z_j		-M	-M	0	0	0	M	-M	**-25M**
$c_j - z_j$		50+M	40+M	0	0	0	-M	0	

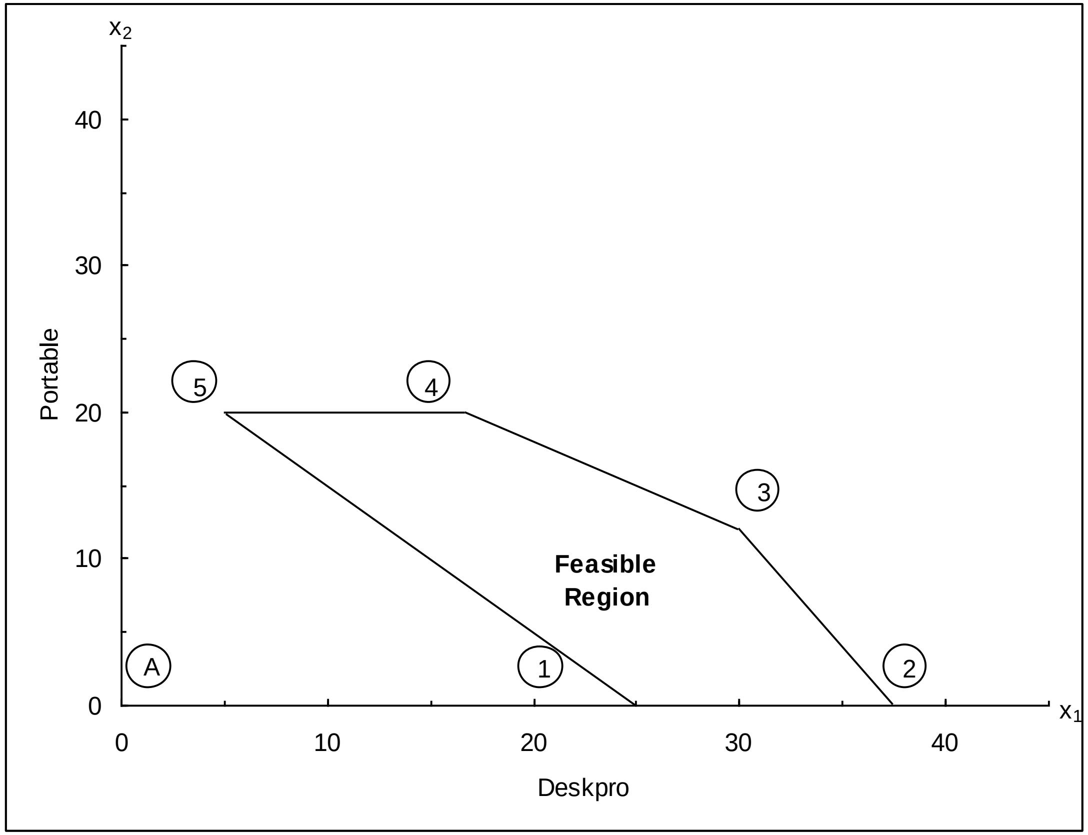
Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Πρώτη Φάση (Phase I)

Results of Iteration 1

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_4	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	0	-M	
s_1	0	0	2	1	0	0	3	-3	**75**
s_2	0	0	1	0	1	0	0	0	**20**
s_3	0	0	-3	0	0	1	8	-8	**100**
x_1	50	1	1	0	0	0	-1	1	**25**
z_j		50	50	0	0	0	-50	50	**1250**
$c_j - z_j$		0	-10	0	0	0	50	-M-50	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD



Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Δεύτερη Φάση (Phase II)

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	0	
s_1	0	0	2	1	0	0	3	**75**
s_2	0	0	1	0	1	0	0	**20**
s_3	0	0	-3	0	0	1	8	**100**
x_1	50	1	1	0	0	0	-1	**25**
z_j		50	50	0	0	0	-50	**1250**
$c_j - z_j$		0	-10	0	0	0	50	

Δεύτερη Επανάληψη

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	0	
s_1	0	0	$^{25}/_{8}$	1	0	$-^{3}/_{8}$	0	$^{75}/_{2}$
s_2	0	0	1	0	1	0	0	**20**
s_4	0	0	$-^{3}/_{8}$	0	0	$^{1}/_{8}$	1	$^{25}/_{2}$
x_1	50	1	$^{5}/_{8}$	0	0	$^{1}/_{8}$	0	$^{75}/_{2}$
z_j		50	$^{250}/_{8}$	0	0	$^{50}/_{8}$	0	**1875**
$c_j - z_j$		0	$^{70}/_{8}$	0	0	$-^{50}/_{8}$	0	

Τρίτη Επανάληψη

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	0	
x_2	40	0	1	$^8/_{25}$	0	$-^3/_{25}$	0	**12**
s_2	0	0	0	$-^8/_{25}$	1	$^3/_{25}$	0	**8**
s_4	0	0	0	$^3/_{25}$	0	$^2/_{25}$	1	**17**
x_1	50	1	0	$-^5/_{25}$	0	$^5/_{25}$	0	**30**
z_j		50	40	$^{14}/_5$	0	$^{26}/_5$	0	**1980**
$c_j - z_j$		0	0	$-^{14}/_5$	0	$-^{26}/_5$	0	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Α. Περίπτωση ισοτήτων περιορισμών:

Πχ. $6\ x_1 + 4\ x_2 - 5\ x_3 = 30$

$\Rightarrow\ 6\ x_1 + 4\ x_2 - 5\ x_3 + 1\ \alpha_1 = 30$

Η μέθοδος Simplex εφαρμόζεται όπως προηγουμένως

Β. Περίπτωση αρνητικών τιμών στη δεξιά πλευρά περιοπισμού:

Πχ. $x_2 \leq x_1 - 5$

$-x_1 + x_2 \leq -5$

$x_1 - x_2 \geq 5$

Πχ. $6\ x_1 + 3\ x_2 - 4\ x_3 \geq -20$

$-6\ x_1 - 3\ x_2 + 4\ x_3 \leq 20$

Πχ. $2\ x_1 + 3\ x_2 - 5\ x_3 = -40$

$-2\ x_1 - 3\ x_2 + 5\ x_3 = 40$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 \\
\text{s. t.} \\
\quad -2x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + 1x_3 - 6x_4 = -60 \\
\quad 1x_1 + 1x_3 + \tfrac{2}{3}x_4 \leq 20 \\
\quad -1x_2 - 5x_3 \leq -50 \\
\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 \\
\text{s. t.} \\
\quad 2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - 1x_3 + 6x_4 = 60 \\
\quad 1x_1 + 1x_3 + \tfrac{2}{3}x_4 \leq 20 \\
\quad 1x_2 + 5x_3 \geq 50 \\
\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$$\text{Max } 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 0s_2 + 0s_3 - M\alpha_1 - M\alpha_3$$

s. t.

$$\begin{aligned}
2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - 1x_3 + 6x_4 \qquad\qquad\qquad + 1\alpha_1 \qquad &= 60\\
1x_1 \qquad + 1x_3 + \tfrac{2}{3}x_4 + 1s_2 \qquad\qquad\qquad &= 20\\
1x_2 + 5x_3 \qquad\qquad - 1s_3 \qquad + 1\alpha_3 &= 50\\
x_1, x_2, x_3, x_4, s_2, s_3, \alpha_1, \alpha_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

The initial simplex tableau corresponding to this tableau form is

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_2	s_3	α_1	α_3	
Basis	C_B	6	3	4	1	0	0	-M	-M	
α_1	-M	2	$^1/_2$	-1	6	0	0	1	0	**60**
s_2	0	1	0	1	$^2/_3$	1	0	0	0	**20**
α_3	-M	0	1	5	0	0	-1	0	1	**50**
z_j		-2M	$-^3/_2$M	-4M	-6M	0	M	-M	-M	**-110M**
$c_j - z_j$		6+2M	3+$^3/_2$M	4+4M	1+6M	0	-M	0	0	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$$\text{Min} \quad 2x_1 + 3x_2$$

s. t.

$$
\begin{array}{rcrcll}
1x_1 & & & \geq & 125 & \text{Demand for product 1} \\
1x_1 & + & 1x_2 & \geq & 350 & \text{Total production} \\
2x_1 & + & 1x_2 & \leq & 600 & \text{Processing time} \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$\text{Max} \quad -2x_1 - 3x_2$$

s. t.

$$
\begin{array}{rcrcll}
1x_1 & & & \geq & 125 & \text{Demand for product 1} \\
1x_1 & + & 1x_2 & \geq & 350 & \text{Total production} \\
2x_1 & + & 1x_2 & \leq & 600 & \text{Processing time} \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Max $-2x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - M\alpha_1 - M\alpha_2$

s. t.

$$
\begin{aligned}
1x_1 \quad\quad - 1s_1 \quad\quad + 1\alpha_1 &= 125 \\
1x_1 + 1x_2 \quad - 1s_2 \quad\quad + 1\alpha_2 &= 350 \\
2x_1 + 1x_2 \quad\quad + 1s_3 &= 600 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, \alpha_1, \alpha_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	α_1	α_2	
Basis	C_B	-2	-3	0	0	0	-M	-M	
α_1	-M	1	0	-1	0	0	1	0	**125**
α_2	-M	1	1	0	-1	0	0	1	**350**
s_3	0	2	1	0	0	1	0	0	**600**
z_j		-2M	-M	M	M	0	-M	-M	**-475M**
$c_j - z_j$		-2+2M	-3+M	-M	-M	0	0	0	

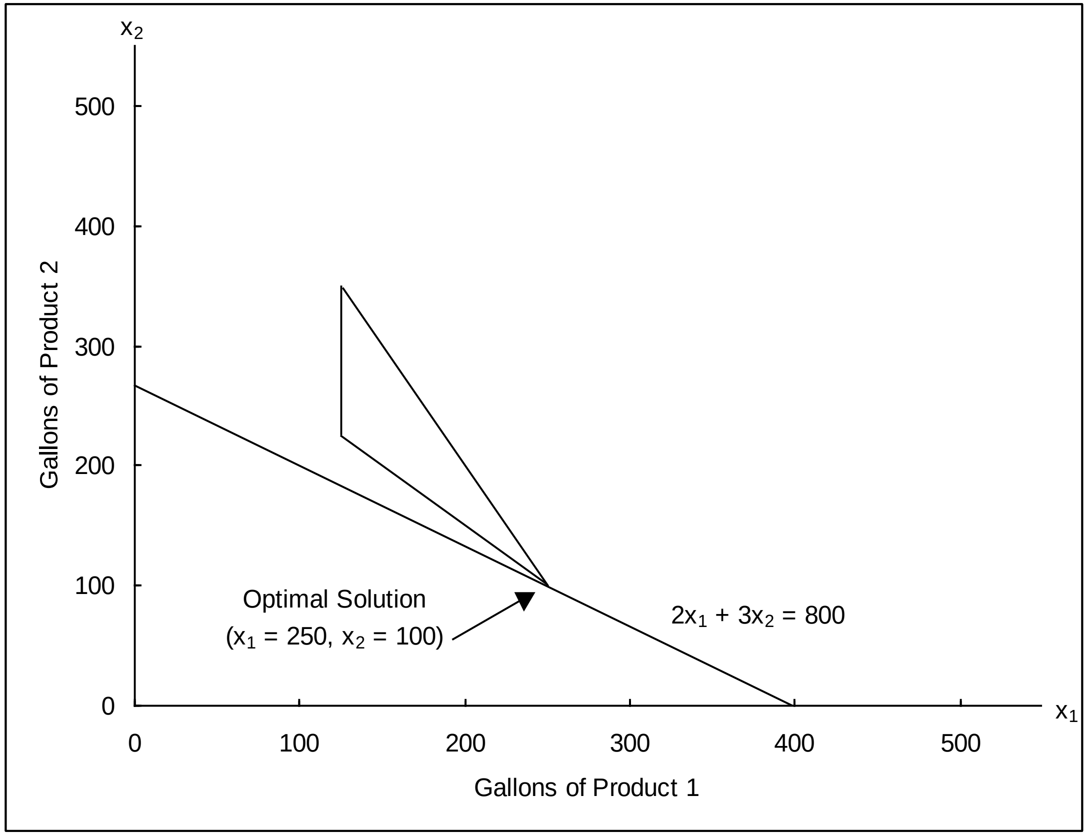
Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	α_2	
Basis	C_B	-2	-3	0	0	0	-M	
x_1	-2	1	0	-1	0	0	0	**125**
α_2	-M	0	1	1	-1	0	1	**225**
s_3	0	0	1	2	0	1	0	**350**
z_j		-2	-M	2-M	M	0	-M	**-250-225M**
$c_j - z_j$		0	-3+M	-2+M	-M	0	0	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	-2	-3	0	0	0	
x_1	-2	1	0	0	1	1	**250**
x_2	-3	0	1	0	-2	-1	**100**
s_1	0	0	0	1	1	1	**125**
z_j		-2	-3	0	4	1	**-800**
$c_j - z_j$		0	0	0	-4	-1	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD



Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Μη Εφικτή Λύση (Infeasibility)

$$\begin{array}{lrcrcrll}
\text{Max} & 50\,x_1 & + & 40\,x_2 & & & & \\
\text{s. t.} & & & & & & & \\
& 3\;\; x_1 & + & 5\;\; x_2 & \leq & 150 & & \text{Assembly time} \\
& & & 1\;\; x_2 & \leq & 20 & & \text{Portable display} \\
& 8\;\; x_1 & + & 5\;\; x_2 & \leq & 300 & & \text{Water house space} \\
& 1\;\; x_1 & + & 1\;\; x_2 & \geq & 50 & & \text{Minimum total production} \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}$$

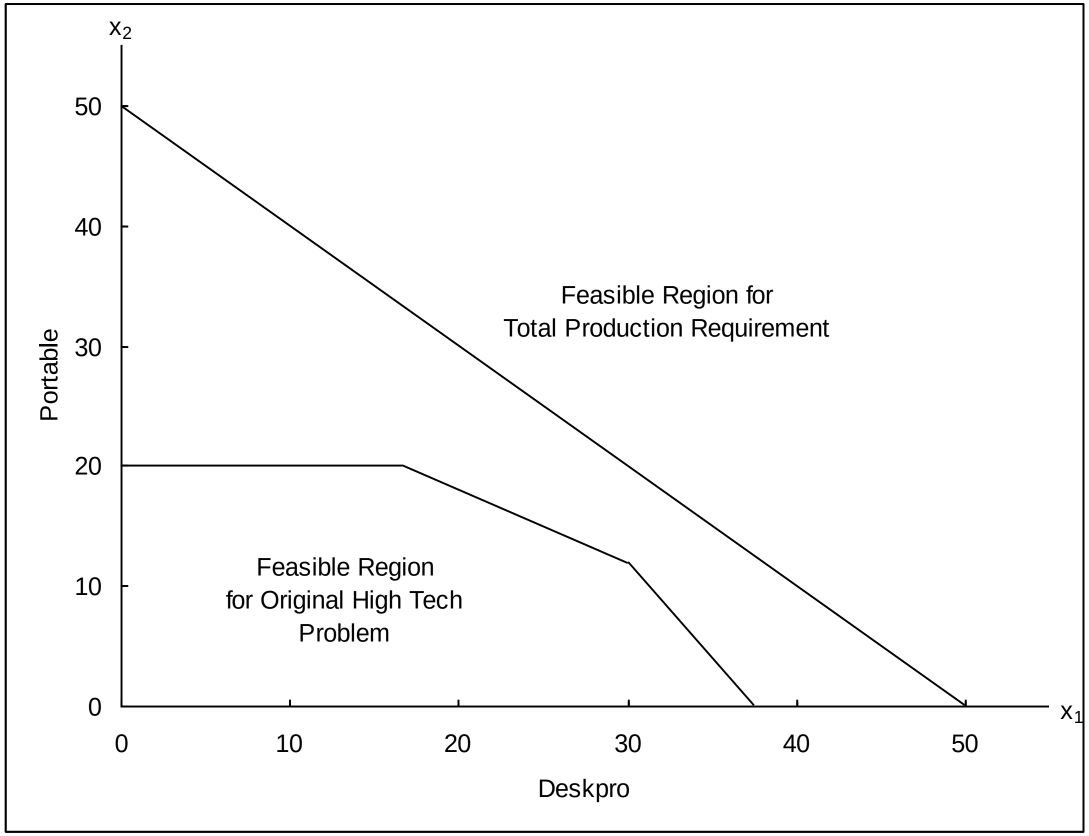
Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$$\text{Max} \quad 50\,x_1 + 40\,x_2 + Ø_{\cdot 1} + \; + Ø_{\cdot 2} + Ø_{\cdot 3} + Ø_{\cdot 4} + -M \quad \alpha_4$$

s. t.

$$\begin{array}{lllllllll}
3\,x_1 & + 5\,x_2 & + 1\,s_1 & & & & & = 150 \\
 & 1\,x_2 & & + 1\,s_2 & & & & = 20 \\
8\,x_1 & + 5\,x_2 & & & + 1\,s_3 & & & = 300 \\
1\,x_1 & + 1\,x_2 & & & & - 1\,s_4 & + 1\,\alpha_4 & = 50
\end{array}$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD



Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Initial Tableau

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_4	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	0	-M	
s_1	0	3	5	1	0	0	0	0	**150**
s_2	0	0	1	0	1	0	0	0	**20**
s_3	0	8	5	0	0	1	0	0	**300**
α_4	-M	1	1	0	0	0	-1	1	**50**
z_j		-M	-M	0	0	0	M	-M	**-50M**
$c_j - z_j$		50+M	40+M	0	0	0	-M	0	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Results of the First Iteration

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_4	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	0	-M	
s_1	0	0	$^{25}/_{8}$	1	0	$-^{3}/_{8}$	0	0	$^{75}/_{2}$
s_2	0	0	1	0	1	0	0	0	**20**
x_1	50	1	$^{5}/_{8}$	0	0	$^{1}/_{8}$	0	0	$^{75}/_{2}$
α_4	-M	0	$^{3}/_{8}$	0	0	$-^{1}/_{8}$	-1	1	$^{25}/_{2}$
z_j		50	$^{(250-3M)}/_{8}$	0	0	$^{(50+M)}/_{8}$	M	-M	$1875-^{25}/_{2}M$
$c_j - z_j$		0	$^{(70+3M)}/_{8}$	0	0	$^{(-50-M)}/_{8}$	-M	0	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Final Tableau

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_3	α_4	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	0	-M	
x_2	40	0	1	$^{8}/_{25}$	0	$-^{3}/_{25}$	0	0	**12**
s_2	0	0	0	$-^{8}/_{25}$	1	$^{3}/_{25}$	0	0	**8**
x_1	50	1	0	$-^{5}/_{25}$	0	$^{5}/_{25}$	0	0	**30**
α_4	-M	0	0	$-^{3}/_{25}$	0	$-^{2}/_{25}$	-1	1	**8**
z_j		50	40	$^{(70+3M)}/_{25}$	0	$^{(130+2M)}/_{25}$	M	-M	**1980-8M**

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- **Στη μέθοδο simplex αναγνωρίζουμε την ύπαρξη μη εφικτής λύσης στην περίπτωση όπου μια ή περισσότερες τεχνητές μεταβλητές παραμείνουν στην τελική λύση (1ης φάσης) με θετική τιμή**.

    - In the simplex method we recognize unfeasibility as the case where one or more of the artificial variables remains in the final solution at a positive value.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Αφραγή Λύση (Unboundedness)

$$\text{Max } \; 20\,x_1 + 10\,x_2$$

s. t.

$$1 \; x_1 \geq 2$$

$$1 \; x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Ο πίνακας Simplex μετά το τέλος της πρώτης επανάληψης

		x_1	x_2	s_1	s_2	
Basis	C_B	20	10	0	0	
x_1	20	1	0	-1	0	**2**
s_2	0	0	1	0	1	**5**
Z_j		20	0	-20	0	**40**
$c_j - z_j$		0	10	20	0	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- Στη μέθοδο simplex αναγνωρίζουμε την ύπαρξη άφραγης λύσης σε περιπτώσεις όπου *όλα* *τα στοιχεία της αξονικής στήλης της εισερχόμενης μεταβλητής είναι μικρότερα ή ίσα με μηδέν*.
  - In the simplex method we recognize unbounded solutions in situations where all the elements of the pivot column of the incoming variable are equal or less than zero.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Εναλλακτικές Λύσεις (Alternative Solutions)

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\text{Max} & 30\,x_1 & + & 50\,x_2 & & & \\
\text{s. t.} & & & & & & \\
 & 3\;\;x_1 & + & 5\;\;x_2 & \le & 150 & \\
 & & & 1\;\;x_2 & \le & 20 & \\
 & 8\;\;x_1 & + & 5\;\;x_2 & \le & 300 & \\
 & & & x_1, x_2 & \ge & 0 &
\end{array}
$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Τελικός Πίνακας Simplex

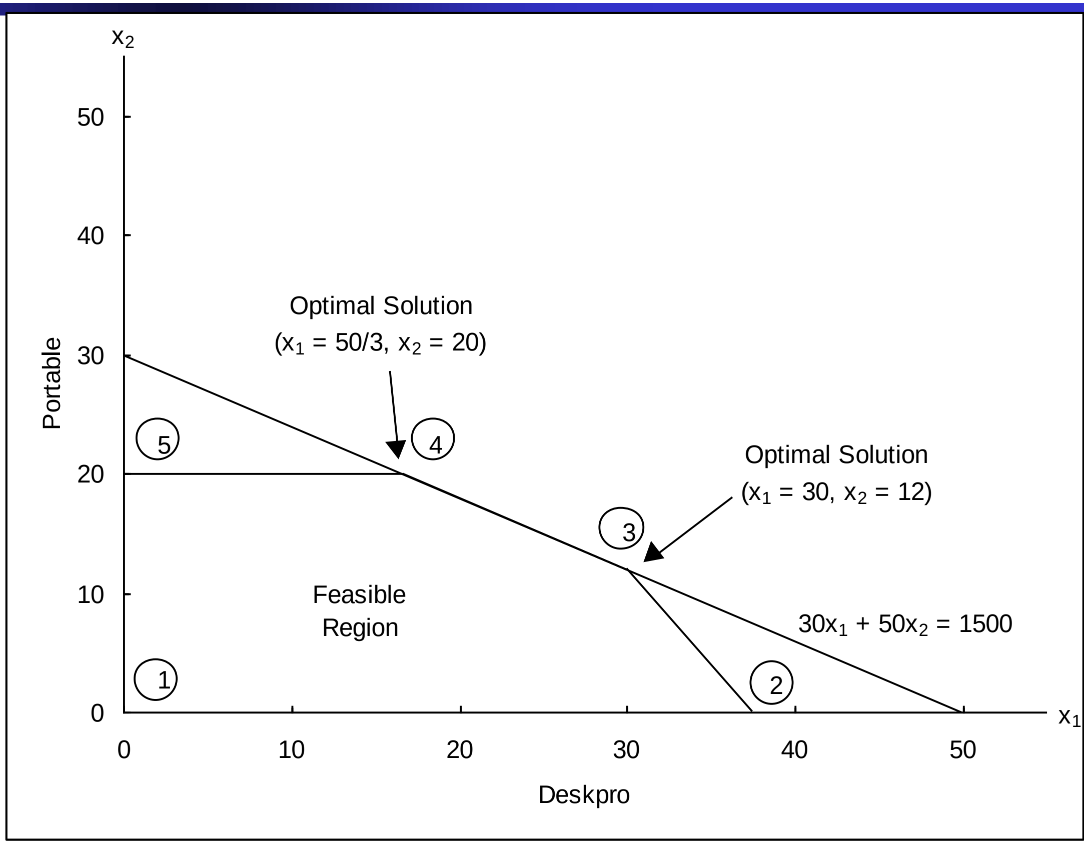
Basis	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
		30	50	0	0	0	
x_2	50	0	1	0	1	0	**20**
s_3	0	0	0	$-^{8}/_{3}$	$^{25}/_{3}$	1	$^{200}/_{3}$
x_1	30	1	0	$^{1}/_{3}$	$-^{5}/_{3}$	0	$^{50}/_{3}$
z_j		30	50	10	0	0	**1500**
$c_j - z_j$		0	0	-10	0	0	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- Η τιμή $c_j - z_j$ της μη βασικής μεταβλητής S_2 είναι ίση με μηδέν.
- Αυτό σημαίνει ότι εάν η μεταβλητή S_2 εισέλθει στη βάση η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν θα αλλάξει.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	30	50	0	0	0	
x_2	50	0	1	$^8/_{25}$	0	$-^3/_{25}$	**12**
S_2	0	0	0	$-^8/_{25}$	1	$^3/_{25}$	**8**
x_1	30	1	0	$-^5/_{25}$	0	$^5/_{25}$	**30**
z_j		30	50	10	0	0	**1500**
$c_j - z_j$		0	0	-10	0	0	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD



Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- **Στη μέθοδο simplex αναγνωρίζουμε την ύπαρξη εναλλακτικών βέλτιστων λύσεων όταν στον τελικό πίνακα της μεθόδου simplex, τα στοιχεία της σειράς καθαρής αξιολόγησης μιας ή περισσοτέρων μη βασικών μεταβλητών είναι ίσα με μηδέν.**
  - In the simplex method we recognize alternative optimal solutions if the value of the element of the net evaluation row of one or more on the non basic variables equals to zero.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- **Ένα ΓΠ είναι <u>εκφυλισμένο</u> όταν μια ή περισσότερες βασικές μεταβλητές έχουν τιμή ίση με μηδέν.**
  - A linear program is said to be degerate if one or more of the basic variables have a value of zero.

- **Στη μέθοδο simplex όταν υπάρχει *ισοπαλία στο ελάχιστο κριτήριο εξόδου από τη βάση μεταξύ δύο βασικών μεταβλητών, ο επόμενος πίνακας* simplex *θα περιέχει μια βασική μεταβλητή με τιμή ίση με μηδέν*.**
  - In the simplex method, whenever there is a tie in the minimum criterion for exiting the basis between two basic variables, the next tableau will always contain a basic variable whose value is zero.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

- **Στην περίπτωση εκφυλισμού σε κάποια επανάληψη πριν τη βέλτιστη λύση, υπάρχει περίπτωση η μέθοδος simplex να εμπλακεί σε ατέρμονα κύκλο επαναλήψεων.**
    - If degeneracy occurs some iteration prior to reaching the optimal solution it is theoretically possible for the simplex method to cycle.

- **Στην περίπτωση εκφυλισμού στον τελικό πίνακα όπου η βέλτιστη λύση έχει εξευρεθεί, αυτός δεν έχει καμία επίπτωση στη μέθοδο simplex.**
    - If degeneracy occurs some iteration prior to reaching the optimal solution it is theoretically possible for the simplex method to cycle.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Max $50\,x_1 + 40\,x_2$

s. t.

$3x_1 + 5x_2 \le 175$	Assembly time decreased to 175
$1x_2 \le 20$	Portable display
$8x_1 + 5x_2 \le 300$	Warehouse space
$x_1, x_2 \ge 0$	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

Ο πίνακας Simplex μετά από μια επανάληψη

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	0	$^{25}/_8$	1	0	$-^{3}/_8$	$^{125}/_2$
s_2	0	0	1	0	1	0	**20**
x_1	50	1	$^{5}/_8$	0	0	$^{1}/_8$	$^{75}/_2$
z_j		50	$^{250}/_8$	0	0	$^{50}/_8$	**1875**
$c_j - z_j$		0	$^{70}/_8$	0	0	$-^{50}/_8$	

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

$$\frac{\bar{b}_1}{\bar{\bar{a}}_{12}} = \frac{125/2}{25/8} = 20$$

$$\frac{\bar{b}_2}{\bar{\bar{a}}_{22}} = \frac{20}{1} = 20$$

$$\frac{\bar{b}_3}{\bar{\bar{a}}_{32}} = \frac{75/2}{5/8} = 60$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX
THE SIMPLEX METHOD

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Basis	C_B	50	40	0	0	0	
x_2	40	0	1	$^{8}/_{25}$	0	$-^{3}/_{25}$	**20**
s_2	0	0	0	$-^{8}/_{25}$	1	$^{3}/_{25}$	**0**
x_1	50	1	0	$-^{5}/_{25}$	0	$^{5}/_{25}$	**25**
z_j		50	40	$^{70}/_{25}$	0	$^{130}/_{25}$	**2050**
$c_j - z_j$		0	0	$-^{70}/_{25}$	0	$-^{130}/_{25}$	